サイバーグ・ウィッテン理論とトポロジー

J.W.モーガン［著］　二木昭人［訳］

THE SEIBERG-WITTEN EQUATIONS AND APPLICATIONS TO THE TOPOLOGY OF SMOOTH FOUR-MANIFOLDS

培風館

The Seiberg–Witten Equations

and Applications to the Topology of Smooth Four-Manifolds

by

John W. Morgan

Mathematical Notes 44

目　　次

1章

はじめに

1980年頃ドナルドソンによってはじめられた仕事により，主束の接続を用いて定義されるゲージ理論的不変量が4次元多様体の研究の重要な道具であることが明らかになった．ドナルドソンは反自己双対接続のモデュライ空間の重要性を示した．その後の15年の間にこの分野で多くの仕事がなされ，広いクラスの4次元多様体，とりわけ代数曲面に対するドナルドソンの多項式不変量が計算された．これらの計算は，例えば楕円曲面の微分同相類への分類など，多くの強力な位相幾何的な結果を産んだ．このような技法を用いて得られる結果については，例えば[1]，[6]や[2]などを参照されたい．

昨秋，量子場理論の新しい仕事に動機づけられ，サイバーグとウィッテン[9]は，ドナルドソンの不変量と密接に関係ある(と彼等は主張している)別のゲージ理論的不変量を定義した．実際彼等は，彼等の不変量とドナルドソンの不変量の間の具体的な関係式を提示した．サイバーグ・ウィッテン不変量とドナルドソン不変量とのこの関係式は数学的に厳密にはまだ証明されていないが，今まで計算されたすべての例では成り立っており，正しいことは明白である．それはそれとして，この予想される関係のことは忘れ，ドナルドソンの反自己双対不変量の代替物としてこのサイバーグ・ウィッテンの新しい不変量を使って直接議論することができる．これが昨年来とられてきたアプローチであった．

ドナルドソン理論では主束の構造群は非可換な $SU(2)$ であるのに対し，新理

論では S^1 であることから，この新しい不変量の方が扱いやすいことは初めから明らかであった．一方新旧の理論の同値性から，この単純な不変量はドナルドソン不変量が明らかにした微妙な結果を同じように導き出すはずであり，これは驚くべきことであった．実際すぐにウィッテン [17] が，そして続いてタウベス，クロンハイマー，ムローカがこの新しい不変量がそのような微妙な結果を導き出すことを示し，そしてしかも多くの場合には計算がよりやさしくなることを示した．彼等はケーラー曲面上でサイバーグ・ウィッテン方程式を具体的に解くことによりこれを示した．(ケーラー曲面に対するこのような結果については [3] を参照.) さらに引き続き注目すべき結果が，ドナルドソンの反自己双対理論から得られる部分的結果を拡張する形で，いくつも得られた．実際，ドナルドソン理論の観点から成り立つと期待された予想で，ドナルドソン理論の枠内でも手は届くかもしれないが技術的に困難であったものが，新しい不変量の強力さを試すテストケースとなった．このような予想の一つ一つが次々に証明されていった —— ただ一つの古典的予想だけは未解決のまま残っている．この残った予想は 11/8 予想とよばれ，単連結 4 次元多様体の交点形式として現われる 2 次形式に関するものである．

本書の目的は，サイバーグ・ウィッテン理論の基礎づけを行うことと，多くのケーラー曲面に対して不変量がどのように計算されるかを説明することである．まずクリフォード代数，スピン構造とその親戚であるスピン ^{c} 構造 (以下 $Spin^c$-構造と表わす)，スピン表現，そしてスピノル束の基礎からはじめる．次に 4 次元リーマン多様体上のスピノル束に対するディラク作用素を考える．ケーラー幾何とのつながりは，ケーラー多様体上ではディラク作用素と $\bar{\partial}$ が密接に関係していることからくる．このことは詳細に検証する．ローソン・マイケルソンの本 [7] はこの題材への完璧な入門書であり，さらにスピン幾何の多くの話題を入念に取り扱っている．

次に我々はサイバーグ・ウィッテン方程式を書き下し，いかにしてある有限次元多様体，すなわちこの方程式の解のゲージ変換を法としたモデュライ空間，をある無限次元の配位空間の中に構成するかを説明する．このモデュライ空間のホモロジー類がサイバーグ・ウィッテン不変量のとる値である．このモデュラ

イ空間を構成するために，反自己双対理論でなじみ深いいくつかの定理の類似物を以下のような手順で証明する．このモデュライ空間の定義方程式はゲージ変換を法として楕円型である．方程式の生成的摂動 (generic perturbation) によりモデュライ空間は滑らかな向き付け可能多様体になり，その次元はアティヤ・シンガー指数定理を用いて計算される．このモデュライ空間に向きを与えるには，考えている 4 次元多様体の H^2_+ と H^1 の向きを 1 つ選べばよい．$b_2^+ > 1$ なる限りは，計量や摂動の変化によりモデュライ空間は滑らかに変化する．しかし $b_2^+ = 1$ のときは，生成的な摂動では滑らかなモデュライ空間が生ずるものの，計量と摂動の変化につれて特異点をもつものが現われる．このような特異点は方程式の可約解である．このことから，反自己双対理論でも現われたように，$b_2^+ = 1$ のときはサイバーグ・ウィッテン不変量に対する領域構造 (chamber structure) が現われる．

続いて，この理論に特有な性質，すなわち解のモデュライ空間のコンパクト性を証明する．これは，方程式の解の各点ごとのノルムの先験的有界性からの帰結である．反自己双対方程式の場合にはこのような結果はない．反自己双対理論の幾何学的豊かさや技術的複雑さの多くはモデュライ空間の非コンパクト性に直接関わるものであった．良きにつけ悪しきにつけ，この点はこの新理論では失われる．したがってサイバーグ・ウィッテンモデュライ空間はコンパクトであり，計量が変わるにつれコンパクトなボルディズムとして変化する．

これらの技術的結果を示してしまえば，配位空間の中のモデュライ空間のホモロジー類が，考えている 4 次元多様体とその上の $Spin^c$-構造の同型類の不変量であることは明らかである．$Spin^c$-構造のサイバーグ・ウィッテン不変量とはこのホモロジー類のことであると定義する．最後に “ほとんどの” 代数曲面に対して解のモデュライ空間を具体的に計算する．その結果として，その曲面上の任意の $Spin^c$-構造に対しサイバーグ・ウィッテン不変量が計算される．ここでは扱わない特別な場合もあるが，これらはここで導入した技術を駆使して計算可能である．[3] に完全な議論が与えられている．

サイバーグ・ウィッテン方程式とこの方程式から定義される不変量については，言及されるべきことがもっとたくさんある．例えばケーラー多様体に対す

る定理のシンプレクティック多様体へのアナロジーがある ([12,13,14] 参照). それから繋ぎ合わせ定理 (glueing theorem) とよばれるものがあり，これから方程式の解に対するマイヤー・ヴィートリス原理が導かれる ([8] 参照). そして，さらにこれから不変量に対する積公式が導かれ，この公式が不変量の位相幾何的理解を深めるための一つのアプローチとなる. 昨年来の驚くべき進展にもかかわらず，多くのことがやり残されている. 本書が，多くの数学者がこの進展に貢献することを可能にするための入門書となることを期待している.

本書は昨年のコロンビア大学とプリンストン大学での講義内容を書き上げたものである. この講義に出席しコメントや質問により本書が形作られるのを助けてくれた両大学の大学院生諸君に感謝したい.

2 章

クリフォード代数とスピン群

任意の $n > 2$ に対し特殊直交群 $SO(n)$ は $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ を基本群としてもち，したがってその普遍被覆群は非自明な 2 重被覆になる．この普遍被覆群を $Spin(n)$ とよぶ．スピン群を作り出す美しい代数的構成方法があり，これが本章の主題であるクリフォード代数である．

2.1 クリフォード代数

例. クリフォード代数の複雑さを一般的に調べる前に，単純な場合を考察しよう．四元数体 $\mathbf{H}$ の中の単位球面 S^3 を考えると，四元数体の積は S^3 に群構造を誘導する．この群の $\mathbf{H}$ への共役による作用

$$S^3 \times \mathbf{H} \to \mathbf{H}$$
$$(\alpha, \lambda) \mapsto \alpha\lambda\alpha^{-1}$$

を考えよう．この作用はノルムを保つ，すなわち直交表現を与える．またこの作用は $\mathbf{H}$ の中心である $\mathbf{R} \subset \mathbf{H}$ を不変にし，したがって $\mathbf{R}$ の直交補空間である純虚数四元数全体のなす 3 次元部分空間 $\mathrm{Im}\mathbf{H}$ も不変にする．もちろん $\mathrm{Im}\mathbf{H}$ は自然に S^3 のリー環と同一視され，考えている作用は S^3 の自分自身のリー環への随伴作用と同じになる．

以下は幾何学のやさしい演習問題である．± 1 と異なる長さ 1 の四元数 α は $\mathbf{Im H}$ への共役作用により 1 次元部分空間 $\mathbf{R}\ \mathrm{Im}\alpha$ とその 2 次元直交補空間を不変にする．前者には自明に作用し，後者には α と 1 のなす角 θ の 2 倍の角度の回転により作用する．したがって $\mathbf{Im H}$ のすべての回転は，表現

$$S^3 \to SO(\mathbf{Im H}) = SO(3)$$

の像に含まれる．この表現の核は S^3 と $\mathbf{H}$ の中心との共通部分，すなわち S^3 の中心 ± 1 である．

このようにして $SO(3)$ の 2 重被覆を長さ 1 の四元数全体のなす群として構成することができた．

正定値内積に付随したクリフォード代数の定義． さて今度は一般論にうつろう．V を正定値内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ をもった $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間とする．ノルムは $\|\cdot\|$ で表わす．V のテンソル代数

$$T(V) = \bigoplus_{n \geq 0} \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n\ \text{回}}$$

を考える．これは単位元 1 をもつ結合的代数である．V で生成される**クリフォード代数** $Cl(V)$ とは，

$$v \otimes v + \|v\|^2 1, \qquad v \in V$$

の形の元で生成される両側イデアルで $T(V)$ を割った商代数である．$T(V)$ の次数付けは $Cl(V)$ の $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ 次数付けを定め，分解

$$Cl(V) = Cl_0(V) \oplus Cl_1(V)$$

を与える．ここに $Cl_0(V)$ は部分代数であり，$Cl_1(V)$ はこの部分代数上の加群である．この分解に対応し，かってな $v \in Cl(V)$ を $v_0 + v_1$ と書くことができる．$Cl_0(V)$ には 1 倍で，$Cl_1(V)$ には -1 倍で作用する代数準同型写像を

$$\epsilon : \ Cl(V) \to Cl(V)$$

により表わす．すなわち $\epsilon(v_0 + v_1) = v_0 - v_1$ である．

V の正規直交基底 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ を選び，$Cl(V)$ を生成元およびそれらの間の関係を書き表わすことにより表現することもできる．すなわち，$Cl(V)$ は生成元 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ で，関係

$$e_i^2 = -1, \qquad 1 \leq i \leq n,$$
$$e_i \cdot e_j = -e_j \cdot e_i, \qquad i \neq j$$

を満たすもので生成される $\mathbf{R}$ 上の代数である．したがって，特に $Cl(V)$ のすべての元は

$$e_{i_1} \cdots e_{i_t}, \qquad i_1 < \cdots < i_t$$

の形の元の 1 次結合として一意的に表わされる．これより $Cl(V)$ の $\mathbf{R}$ 上の次元は 2^n となることがわかる．

例． (i) $\mathbf{R}^n$ を通常の n 次元ユークリッド空間とする．すると $Cl(\mathbf{R}^1) = \mathbf{R}[x]/(x^2+1) \cong \mathbf{C}$ となる．部分代数 $Cl_0(\mathbf{R}^1)$ は実数全体と同一視され，$Cl_1(\mathbf{R}^1)$ は純虚数の複素数全体と同一視される．

(ii) 同様に $Cl(\mathbf{R}^2)$ は

$$x^2 = -1; \quad y^2 = -1; \quad xy = -yx$$

の関係に従う元 x, y で生成される．したがって $Cl(\mathbf{R}^2)$ は四元数体 $\mathbf{H}$ と同型である．部分代数 $Cl_0(\mathbf{R}^2)$ は xy で生成され，$\mathbf{C} \subset \mathbf{H}$ と同一視される．

(iii) $Cl(\mathbf{R}^3)$ は $\mathbf{R}$ 上で 8 次元である．生成元は x, y, z で，$x^2 = y^2 = z^2 = -1$ と $xy = -yx$, $yz = -zy$, $zx = -xz$ に従う．この代数は $\mathbf{H} \oplus \mathbf{H}$ と同型である．実際，$\mathbf{H}$ から第 1 および第 2 成分への同型写像は，$1, i, j, k$ をそれぞれ

$$\frac{1+xyz}{2}, \quad \frac{xy-z}{2}, \quad \frac{yz-x}{2}, \quad \frac{zx-y}{2};$$
$$\frac{1-xyz}{2}, \quad \frac{xy+z}{2}, \quad \frac{yz+x}{2}, \quad \frac{zx+y}{2}$$

にうつすことによって得られる．部分代数 $Cl_0(\mathbf{R}^3)$ はこの分解の対角線集合と同一視される．

(iv) 任意の内積空間 V に対し，代数としての同型 $Cl(V) \cong Cl_0(V \oplus \mathbf{R})$ が存在する．e を $\mathbf{R}$ の単位ベクトルとすると，同型写像は

$$v_0 + v_1 \mapsto v_0 + v_1 e$$

で与えられる．これが実際に代数としての同型写像であることは簡単な練習問題である．したがって特に $Cl_0(\mathbf{R}^4)$ は $\mathbf{H} \oplus \mathbf{H}$ と同型である．

外積代数との比較. $T(V)$ の次数付けは，$Cl(V)$ の線形部分空間による増大するフィルター付け

$$0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots$$

を誘導する．すなわち $\mathcal{F}_t$ を

$$\bigoplus_{n \leq t} \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n\text{ 回}}$$

の $Cl(V)$ への像とおく．

$$\mathcal{F}_i \otimes \mathcal{F}_j \to \mathcal{F}_{i+j}$$

が成り立つという意味において $Cl(V)$ の積はこのフィルター付けを保つ．よって同伴な次数付き代数

$$\mathrm{Gr}_{\mathcal{F}_*}(Cl(V)) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n / \mathcal{F}_{n-1}$$

で，誘導される積をもつものが定まる．

主張 2.1.1 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{F}_*}(Cl(V))$ は自然に外積代数 $\Lambda^*(V)$ と同型である．

証明 $\tilde{\mathcal{F}}_*$ を $T(V)$ の自然なフィルター付けとする．$T(V)$ と $\mathrm{Gr}_{\tilde{\mathcal{F}}_*}(T(V))$ の間には自然な同型がある．したがって次の可換図式を得る．

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{I}(v \otimes v + \|v\|^2 1) & \longrightarrow & T(V) & \longrightarrow & Cl(V) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \\
\mathcal{I}(v \otimes v) & \longrightarrow & \mathrm{Gr}_{\tilde{\mathcal{F}}_*}(T(V)) & \longrightarrow & \mathrm{Gr}_{\mathcal{F}_*}(Cl(V)) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

一方，$T(V)$ をすべての $v \in V$ に対する $v \otimes v$ で生成される両側イデアルで割った商代数がちょうど外積代数 $\Lambda^*(V)$ である．よってこの図式が主張の同型写像を与える． □

次に，自然な写像 $\sigma : \Lambda^*(V) \to Cl(V)$ が存在することをみたい．この写像は線形であるが積構造は保たない．σ は次のように定義される．$\Lambda^k(V)$ の基本的元 (つまりある k 次元部分空間 $W \subset V$ が存在して $\Lambda^k(W) \subset \Lambda^k(V)$ の元として得られるもの) を考えよう．このような元は，W の正規直交基底 $e_1, \cdots, e_k$

と $r > 0$ に対し，$re_1 \wedge \cdots \wedge e_k$ の形に書ける．そこで σ を

$$\sigma(re_1 \wedge \cdots \wedge e_k) = re_1 \cdots e_k$$

により定義する．これが無矛盾に定義されていることを示すのは簡単な練習問題である．

この同型を用いて，$Cl(V)$ を $\Lambda^*(V)$ に新しい積構造を入れたものとみることができる．この新しい積は

$$v \cdot (v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = v \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_k - v \angle (v_1 \wedge \cdots \wedge v_k)$$

で生成される．ここに $\angle$ は縮約

$$v \angle (v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \langle v, v_i \rangle v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v_i} \wedge \cdots \wedge v_k$$

である．

2.2　群 $Pin(V)$ と $Spin(V)$

$Cl^\times(V)$ を代数 $Cl(V)$ の可逆元全体のなす乗法群とする．群 $Pin(V)$ は $\|v\|^2 = 1$ となる元 $v \in V$ で生成される $Cl^\times(V)$ の部分群とする．これらの $Pin(V)$ の生成元は，その 2 乗は -1 なので，可逆元であることに注意しよう．$Spin(V)$ を $Pin(V)$ と $Cl_0(V)$ の共通部分とする．すなわち $Spin(V)$ は，分解 $Cl(V) = Cl_0(V) \oplus Cl_1(V)$ から誘導される群の準同型写像 $Pin(V) \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ の核とする．$Pin(V)$ の生成元は $Cl_1(V)$ に含まれるので，$Spin(V)$ は $Pin(V)$ の生成元の偶数個の積で書ける指数 2 の部分群である．最初の 4 つの例の場合にこれらの群を計算してみよう．

(i)　群 $Pin(1)$ は $\pm i$ で生成される $\mathbf{C}^\times$ の部分群である．よってこれは位数 4 の巡回群である．部分群 $Spin(1)$ は位数 2 の群 $\{\pm 1\} \subset \mathbf{R}$ である．

(ii)　群 $Pin(2)$ は j と k を通る円周，つまり $\cos(\theta)j + \sin(\theta)k$ $(\theta \in S^1)$ の形のすべての元，で生成される $\mathbf{H}^\times$ の部分群である．容易にわかるようにこの群は 2 つの円周の和集合である —— すなわち，複素平面内の通常の単位円とその j 倍である．よって群 $Spin(2)$ は S^1 と同型である．

(iii)　群 $Spin(3)$ は，$Cl_0(\mathbf{R}^3) \cong \mathbf{H}$ 内の単位四元数の群と同型である．これ

をみるには，まず，上記の $Cl(\mathbf{R}^3)$ と $\mathbf{H}\oplus\mathbf{H}$ の同一視において，ベクトル空間 $\mathbf{R}^3$ は純虚数四元数 α に対し $(\alpha,-\alpha)$ と書ける元全体と同一視されることに注意する．したがって任意の単位純虚数四元数 α,β に対し，積 $\alpha\beta$ は

$$\alpha\beta\in Spin(3)\subset Cl_0(\mathbf{R}^3)=\mathbf{H}\xrightarrow{\Delta}\mathbf{H}\oplus\mathbf{H}$$

とみることができる．容易にわかるように，この積全体からなる集合は単位四元数全体のなす群 S^3 を生成する．

(iv) $Spin(4)\subset Cl_0(\mathbf{R}^4)\cong\mathbf{H}\oplus\mathbf{H}$ を考察しよう．もちろん同一視 $Cl(\mathbf{R}^3)\cong Cl_0(\mathbf{R}^4)$ のもとに，群 $Spin(3)$ は $Spin(4)$ の部分群になる．しかし $\mathbf{R}^4$ には異なる 3 次元線形部分空間がたくさんある．これらの線形部分空間各々に対し $Spin(3)$ の $Spin(4)$ への埋め込みを得る．この埋め込みの像全体の和集合が $S^3\times S^3\subset\mathbf{H}\times\mathbf{H}$ を生成することは簡単に示すことができる．これにより $Spin(4)$ は $SU(2)\times SU(2)$ と同一視される．

$\{e_1,\cdots,e_n\}$ を V の正規直交基底とすると，$e_{i_1}\cdots e_{i_t}$ の形のすべての積は $Pin(V)$ の元になることに注意しよう．このことは $Pin(V)$ は $Cl(V)$ のベクトル空間としての基底を含んでいることを意味し，したがってまた $Cl(V)$ は，可逆元全体のなす乗法群が $Pin(V)$ を含むような $\mathbf{R}$ 上の代数の中で最小のものであることを意味する．同様に $Spin(V)$ は $Cl_0(V)$ の $\mathbf{R}$ 基底を含む．

系 2.2.1
- $Cl_0(V)$ の 2 つの (実または複素) 表現で $Spin(V)$ に制限すると同型になるものは，代数の表現としても同型である．
- A を (実または複素) $Cl_0(V)$ 加群とし，$A'\subset A$ を $Spin(V)$ の誘導作用で不変な部分空間とする．このとき，A' は $Cl_0(V)$ 加群になる．

証明　2 つの $Cl_0(V)$ 加群 A_1 と A_2 は，ベクトル空間としての同型写像 φ で誘導された $Spin(V)$ 作用と可換なものをもつとする．すると φ は $Cl_0(V)$ の $\mathbf{R}$ 基底の作用と可換である．すなわち φ は $Cl_0(V)$ 加群としての同型を与える．よって最初の主張が証明された．2 番目の主張も同様に証明される． □

$Cl(V)$ と $Pin(V)$ についても同様であることに注意しよう．

明らかに，直交群 $O(V)$ の V への自然な作用は $Cl(V)$ 上への作用に拡張し，$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ 次数付けを保つ代数の自己同型となる．この作用は効果的で，した

がって，$O(V)$ は $Cl(V)$ の代数自己同型群に埋め込まれる．$Cl(V)$ は代数として $V \subset Cl(V)$ で生成されており，また $v \cdot v = -\|v\|^2 1$ であるので，この埋め込みの像は V を保つ $Cl(V)$ の代数自己同型全体と一致することがわかる．部分群 $SO(V)$ は V を保ち，そしてその上に向きを保って作用するような $Cl(V)$ の代数自己同型全体のなす群であるといい表わすことができる．

群 $Spin(V)$ は $Cl(V)$ に共役で作用する：つまり $\sigma \cdot c = \sigma c \sigma^{-1}$．容易にわかるように，この作用も代数構造と $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ 次数付けを保つ．$SO(V)$ と $Spin(V)$ の基本的つながりはこれらの作用を通してみることができる．

補題 2.2.2 $Spin(V)$ の $Cl(V)$ への作用は，$Spin(V)$ のクリフォード代数 $Cl(V)$ の自己同型としての表現を誘導する．この表現の像は $V \subset Cl(V)$ を保ち V の向きを保つ $Cl(V)$ の自己同型からなる．したがって準同型写像 $Spin(V) \to SO(V)$ が誘導される．この写像は全射で，核は $\{\pm 1\}$ である．もし V の次元が 3 以上ならば，この写像の核は $Spin(V)$ の中心であり，この写像により $Spin(V)$ は $SO(V)$ の普遍被覆になる．

証明 まず最初に，$Spin(V)$ の $Cl(V)$ への表現は $Pin(V)$ の $Cl(V)$ への共役表現を制限したものであることに注意しよう．この表現は $V \subset Cl(V)$ を保つことを検証しよう．それには $Pin(V)$ の生成元，すなわち V の長さ 1 の元に対して検証すればよい．$\|w\|^2 = 1$ なる任意の $w \in V$ と任意の $v \in V$ に対し，

$$wvw^{-1} = -R_{w^\perp}(v)$$

が成り立つ．ここに $R_{w^\perp}(v)$ は w に直交する超平面 $w^\perp$ に関する反転である．特に $wvw^{-1} \in V$ となる．したがって $Spin(V)$ の作用は V を不変にし，その上に向きを保って作用する．よって特に，$Spin(V)$ の V への作用は，長さ 1 のベクトルに関する反転の偶数個の積全体からなることに注意しよう．よく知られているように，$SO(V)$ の任意の元はそのような反転の偶数個の積で表わすことができる．このことから写像 $Spin(V) \to SO(V)$ は全射であることがわかる．明らかに，$Spin(V)$ と $Cl(V)$ の中心との共通部分が，この表現の核である．

主張 2.2.3 もし V の次元が偶数ならば，$Cl(V)$ の中心は $\mathbf{R}$ で，$Cl_0(V)$

に含まれる．もし V の次元が奇数ならば，$Cl(V)$ の中心は $\mathbf{R}\oplus\mathbf{R}$ で，この中心と $Cl_0(V)$ との共通部分は $\mathbf{R}$ と同型である．

証明 V の正規直交基底 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ を固定する．直接計算することにより

$$e_j\cdot(e_{i_1}\cdots e_{i_t})=\pm(e_{i_1}\cdots e_{i_t})\cdot e_j$$

が示される．ここに任意の $1\le r\le t$ に対し $j\ne i_r$ のときは符号は $(-1)^t$ で，ある $1\le r\le t$ に対し $j=i_r$ のときは符号は $(-1)^{t-1}$ である．このことと表示の一意性より，V の次元が偶数のとき $Cl(V)$ の中心は単に単位元 1 の実数倍全体である．V の次元が奇数のときは，$Cl(V)$ の中心は 1 と $e_1\cdots e_n$ で生成される実ベクトル空間である． □

よって $Spin(V)$ の中心は乗法群 $\mathbf{R}^*$ の部分群である．$Pin(V)$ の任意の生成元の 2 乗は -1 なので，任意の V に対し $Spin(V)$ は $\{\pm1\}$ を含むことがわかる．

主張 2.2.4 $Spin(V)$ と $Cl(V)$ の中心との共通部分は $\{\pm1\}$ である．

証明 $v_1\otimes\cdots\otimes v_r\to v_r\otimes\cdots\otimes v_1$ により定義されるテンソル代数の写像から誘導される $Cl(V)$ の反準同型写像を $\phi\mapsto\phi^t$ により表わす．ノルムとよばれる写像 $N:Cl(V)\to\mathbf{R}^*$ を $\alpha\mapsto\alpha\epsilon(\alpha^t)$ により定義する (ϵ は 2.1 節で定義したもの)．すると $N|_{Pin(V)}:Pin(V)\to\mathbf{R}^*$ が準同型であることを示すのはやさしい．$Pin(V)$ は，2 乗したら -1 になる元で生成されるので，写像 $N|_{Pin(V)}$ の像は $\{\pm1\}$ に含まれる．実際，任意の長さ 1 の $v\in V$ に対し $N(v)=1$ であることが直接計算することによって確かめられる．よって $N|_{Pin(V)}$ の像は $\{1\}$ である．明らかに，$Cl(V)$ の中心 $\mathbf{R}$ または $\mathbf{R}\oplus\mathbf{R}$ に N を制限すると，各 $\mathbf{R}$ 成分に対し 2 乗をとる写像になる．よって $Spin(V)$ の中心は $\{\pm1\}$ に含まれることがわかり，したがってちょうど $\{\pm1\}$ になる． □

ここまでの議論から，自然な同型写像 $Spin(V)/\{\pm1\}\to SO(V)$ が得られた．次に $Spin(V)$ は単に $SO(V)$ の 2 つのコピーではないことを示そう．

主張 2.2.5 もし V の次元が 2 以上ならば，自然な写像 $Spin(V)\to SO(V)$ は自明でない 2 重被覆である．

証明 $Spin(V) \to SO(V)$ が 2 重被覆であることは示した．残っていることは，V の次元が 2 以上ならばこれが自明でない 2 重被覆であることを示すことである．このためには V の 2 次元部分空間 W に制限すれば十分である．つまり，$SO(W) \subset SO(V)$ の原像は $Spin(W) \subset Spin(V)$ であり，$\pi_1(SO(W)) \to \pi_1(SO(V))$ は全射なので，$Spin(W) \to SO(W)$ が自明でない 2 重被覆であることを示せば十分である．$Cl(W)$ は $\mathbf{H}$ と，$Spin(W)$ は $\mathbf{C} \subset \mathbf{H}$ の単位円周と同一視され，また $W \subset Cl(W)$ は j, k で生成される線形部分空間と同一視された．これより，$Spin(W)$ の W への共役作用は S^1 の W への通常の作用の単なる 2 乗となる．よって主張の結果が得られた． □

これにより補題 2.2.2 の証明が終わった． □

系 2.2.6 V の次元を n とする．すると $Spin(V)$ は $n(n-1)/2$ 次元のコンパクトなリー群であり，$n > 1$ ならば連結で，$n > 2$ ならば単連結である．そのリー環は $SO(n)$ のリー環と同じである．

系 2.2.7 任意の (実または複素) $Cl_0(V)$ または $Cl(V)$ 加群は完全可約である，すなわち既約加群の直和に分解できる．

証明 $Spin(V)$ と $Pin(V)$ はコンパクト群なのでこれらの群の表現に対する対応する主張は成立する．このことと系 2.2.1 より結果はただちに従う． □

例． (i) $Cl(\mathbf{R}^3)$ は代数 $\mathbf{H} \oplus \mathbf{H}$ と，$Cl_0(\mathbf{R}^3)$ は対角線集合としての $\mathbf{H}$ と同一視された．群 $Spin(3)$ は $Cl_0(\mathbf{R}^3) = \mathbf{H}$ の中の長さ 1 の可逆元全体のなす群の部分群である．$Spin(3)$ は 3 次元なので $Spin(3)$ は $\mathbf{H}$ の長さ 1 の可逆元全体の群と一致する．この群は S^3 とも $SU(2)$ とも同一視される．$Spin(3)$ の $\mathbf{R}^3$ への作用は，純虚数四元数のなす 3 次元空間への S^3 の通常の共役作用として与えられる．これはもちろん $SU(2)$ のそのリー環への通常の随伴表現であり，この表現の像は $SO(3)$ である．クリフォード代数を用いることにより，この構成を高次元に一般化することができた．もちろん $\mathbf{H}$ を高次元に一般化する斜体は存在しない．我々が高次元でやったことは，$\mathbf{H}$ を斜体でなくクリフォード代数で置き換えたことである．

(ii) 群 $Spin(4)$ は $SO(4) \cong SU(2) \times SU(2)/\{\pm 1\}$ の 2 重被覆である．したがって $Spin(4) \cong SU(2) \times SU(2)$ となる．この分解については後で再びふれることにする．

2.3 クリフォード代数の分解

V を向き付けられた実内積空間とし (正定値内積をもつとする)，$Cl(V) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ をクリフォード代数の複素化とする．これは複素代数である．V の向き付けられた正規直交基底 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ を固定し，

$$\omega_{\mathbf{C}} = i^{[\frac{n+1}{2}]} e_1 \cdots e_n$$

とおく．簡単な計算が示すように $\omega_{\mathbf{C}}^2 = 1$ であり，また $\omega_{\mathbf{C}}$ は向き付けられた基底のとり方によらない．よって $\omega_{\mathbf{C}}$ を用いて $Cl(V) \otimes \mathbf{C}$ を $(Cl(V) \otimes \mathbf{C})^+ \oplus (Cl(V) \otimes \mathbf{C})^-$ に分解できる．ここに $(Cl(V) \otimes \mathbf{C})^\pm$ は $\omega_{\mathbf{C}}$ の左からのかけ算による作用の ± 1 固有空間である．もし V の次元が奇数ならば $\omega_{\mathbf{C}}$ は $Cl(V) \otimes \mathbf{C}$ の中心に属する．一方，V の次元が偶数ならば $\omega_{\mathbf{C}}$ は $Cl_0(V) \otimes \mathbf{C}$ の中心に属するが，$Cl_1(V) \otimes \mathbf{C}$ の元とは反可換となる．

もし $\dim V = n$ が奇数ならば $\omega_{\mathbf{C}}$ は $Cl(V) \otimes \mathbf{C}$ の中心に属する．このことは $(Cl(V) \otimes \mathbf{C})^\pm$ は部分代数で，双方の元をかけると 0 になることを意味する．つまり代数としての直和分解

$$Cl(V) \otimes \mathbf{C} = (Cl(V) \otimes \mathbf{C})^+ \oplus (Cl(V) \otimes \mathbf{C})^-$$

を得る．

補題 2.3.1 もし V の次元が奇数ならば，代数 $(Cl(V) \otimes \mathbf{C})^\pm$ はどちらも $Cl_0(V) \otimes \mathbf{C}$ と同型である．

証明 $\omega_{\mathbf{C}}$ の左作用は $Cl_0(V) \otimes \mathbf{C}$ と $Cl_1(V) \otimes \mathbf{C}$ を入れ換える．したがって $Cl_0(V) \otimes \mathbf{C}$ は $(Cl(V) \otimes \mathbf{C})^\pm$ と $\mathbf{0}$ のみで交わる．よって合成写像

$$Cl_0(V) \otimes \mathbf{C} \hookrightarrow Cl(V) \otimes \mathbf{C} \xrightarrow{\pi^\pm} (Cl(V) \otimes \mathbf{C})^\pm$$

は代数としての同型となる． □

上の $Cl_0(V) \otimes \mathbf{C}$ の埋め込みは，ある代数同型 $(Cl(V) \otimes \mathbf{C})^+ \to (Cl(V) \otimes \mathbf{C})^-$

のグラフとなることに注意しよう．

例. (i) $Cl(\mathbf{R}^1) \cong \mathbf{C}$ なので，$Cl(\mathbf{R}^1) \otimes \mathbf{C}$ は $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ と同型である．$Cl(\mathbf{R}^1) \otimes \mathbf{C}$ の $(Cl(\mathbf{R}^1) \otimes \mathbf{C})^{\pm}$ への分解は，通常の分解

$$\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \cong \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$$

に対応する[訳注 1)]．この場合，複素化の分解は実クリフォード代数の分解からは誘導されない．というのは $Cl(\mathbf{R}^1) \cong \mathbf{C}$ は実単純代数だからである．

(ii) $Cl(\mathbf{R}^3)$ は $\mathbf{H} \oplus \mathbf{H}$ と同一視される．この分解の複素化が $Cl(\mathbf{R}^3) \otimes \mathbf{C}$ の $(Cl(\mathbf{R}^3) \otimes \mathbf{C})^{\pm}$ への分解である．したがってこの場合，複素代数の分解は実代数の分解から誘導される．

補題 2.3.2 もし V の次元が 4 を法として 3 に等しければ，$Cl(V)$ は 2 つの代数の直和 $Cl(V) = Cl(V)^+ \oplus Cl(V)^-$ に分解され，この分解が上の複素化された代数の分解を誘導する．

証明 V の次元が 4 を法として 3 に等しいとき，$\omega_{\mathbf{C}}$ は $(-1)^{\frac{n+1}{4}} e_1 \cdots e_n$ に等しく，よってこの元は実代数に含まれる．よって，その ± 1 固有空間は実部分空間になる． □

V が偶数のとき，$\omega_{\mathbf{C}}$ は $Cl(V) \otimes \mathbf{C}$ の異なるタイプの分解を与える．この場合 $\omega_{\mathbf{C}}$ は $Cl_0(V) \otimes \mathbf{C}$ の中心に属し，直和分解

$$Cl_0(V) \otimes \mathbf{C} = (Cl_0(V) \otimes \mathbf{C})^+ \oplus (Cl_0(V) \otimes \mathbf{C})^-$$

を誘導する．余次元 1 の部分空間 $W \subset V$ に対する同型 $Cl_0(V) \cong Cl(W)$ のもとに，この分解は奇数次元のときに与えられたものと一致する．特に $(Cl_0(V) \otimes \mathbf{C})^+$ と $(Cl_0(V) \otimes \mathbf{C})^-$ の間の同型が存在する．

補題 2.3.3 もし V が偶数次元ならば，余次元 2 の部分空間 $W \subset V$ に対し $(Cl_0(V) \otimes \mathbf{C})^+$ は代数として $Cl(W) \otimes \mathbf{C}$ と同型である．

訳注 1) 以後脚注はすべて訳者による．これは代数としての同型なので見かけほど自明ではない．$\mathbf{C} \otimes \mathbf{C}$ の片方の $\mathbf{C}$ の複素構造に関する $(1,0)$-部分と $(0,1)$-部分への直和分解である．[7], p.27 参照．

証明 余次元 1 の部分空間 $W' \subset V$ に対し $Cl_0(V) \otimes \mathbf{C}$ は $Cl(W') \otimes \mathbf{C}$ と同型である．よって

$$(Cl_0(V) \otimes \mathbf{C})^+ \cong (Cl(W') \otimes \mathbf{C})^+ \cong Cl_0(W') \otimes \mathbf{C}.$$

最後の項は，余次元 1 の部分空間 $W \subset W'$ に対し，$Cl(W) \otimes \mathbf{C}$ と同型である． □

$(Cl(V) \otimes \mathbf{C})^+$ と $\Lambda^*_+ \otimes \mathbf{C}$ の比較訳注 2)． ここで証明したい主結果は次である：

補題 2.3.4 V を 4 次元ベクトル空間とする．ベクトル空間としての自然な同型 $\Lambda^* \otimes \mathbf{C} \cong Cl(V) \otimes \mathbf{C}$ のもとに，$(Cl_0(V) \otimes \mathbf{C})^+$ と対応する部分空間は $\mathbf{C}(\frac{1+\omega_{\mathbf{C}}}{2}) \oplus (\Lambda^2_+(V) \otimes \mathbf{C})$ である．

証明 もちろん $Cl_0(V)$ は $\Lambda^0(V) \oplus \Lambda^2(V) \oplus \Lambda^4(V)$ に対応する．$\omega_{\mathbf{C}}$ の左からの積は $\Lambda^2(V) \otimes \mathbf{C}$ を不変にし，$\Lambda^0(V) \otimes \mathbf{C}$ と $\Lambda^4(V) \otimes \mathbf{C}$ を入れ換える．V の向き付けられた正規直交基底 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ を 1 つ固定する．すると

$$\omega_{\mathbf{C}} \cdot (e_1 e_2) = e_3 e_4$$

となる．対称性から，相異なる任意の添え数 i_1, i_2 に対し，$\omega_{\mathbf{C}} \cdot e_{i_1} e_{i_2} = *(e_{i_1} e_{i_2})$ となる．これより結果はただちに得られる．(もし $\omega_{\mathbf{C}}$ の代わりに $\omega_{\mathbf{R}} = e_1 e_2 e_3 e_4$ を使うとこの結果は成り立たないことに注意しよう．) □

2.4 $Cl(V)$ の複素化

まず最初の 2 つの例からはじめよう訳注 3)．

(i) $Cl(\mathbf{R}^1) \cong \mathbf{C}$ はすでにみた．よってこれより $Cl(\mathbf{R}^1) \otimes \mathbf{C} \cong \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$ を得る．

(ii) $Cl(\mathbf{R}^2) \cong \mathbf{H}$ はすでにみた．よってこれより $Cl(\mathbf{R}^2) \otimes \mathbf{C} \cong \mathbf{H} \otimes \mathbf{C}$ を得る．$\mathbf{H}$ から 2 行 2 列の複素行列の代数 $\mathbf{C}[2]$ への写像を，$\alpha + j\beta$ を

訳注 2) ホッジ $*$-作用素の 1 固有空間を Λ^*_+ と表わす．[1] または [7] 参照．

訳注 3) 本節では d 次正方複素行列全体のなす代数を $\mathbf{C}[d]$ で表わす．

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

にうつすものとして定義する．$\mathbf{H}$ の元を $x+jy$ $(x, y \in \mathbf{C})$ と表わすと，$\alpha+j\beta$ の $\mathbf{H}$ への左からの積による作用の，$\mathbf{H}$ を $\mathbf{C}^2$ とみたときの表現行列が上の行列である．α, β の実部および虚部を複素数に拡大することにより，$\mathbf{C}$-代数の準同型写像

$$\mathbf{H} \otimes \mathbf{C} \to \mathbf{C}[2]$$

が得られる．明らかに，この写像は $\mathbf{C}$-代数の同型を与える．よって $Cl(\mathbf{R}^2) \otimes \mathbf{C}$ の 2 行 2 列の行列代数 $\mathbf{C}[2]$ との同一視が得られた．$Cl(\mathbf{R}^2) \otimes \mathbf{C}$ は $\mathbf{C} \cong (Cl_0(\mathbf{R}^2) \otimes \mathbf{C})^+$ 上の 2 行 2 列の行列代数であることに注意しよう．

この 2 つの計算から，帰納法を使ってすべての複素化されたクリフォード代数の構造が決定される．帰納法の基本的ステップは次の補題に含まれる．

補題 2.4.1

$$Cl(V \oplus \mathbf{R}^2) \otimes \mathbf{C} \cong (Cl(V) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}) \otimes_{\mathbf{C}} (Cl(\mathbf{R}^2) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}).$$

証明 $v_1, \cdots, v_n$ を V の正規直交基底とし，e_1, e_2 を $\mathbf{R}^2$ の標準的基底とする．実線形写像

$$V \oplus \mathbf{R}^2 \to (Cl(V) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}) \otimes_{\mathbf{C}} (Cl(\mathbf{R}^2) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})$$

を，$1 \leq j \leq n$ に対し v_j を $iv_j \otimes e_1 e_2$ に送り，e_r を $1 \otimes e_r$ に送ることにより定義する．直接計算することにより，この写像は代数準同型

$$Cl(V \oplus \mathbf{R}^2) \to (Cl(V) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}) \otimes_{\mathbf{C}} (Cl(\mathbf{R}^2) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})$$

に拡張するための条件を満たすことがわかる[訳注 4)]．そして，さらに係数を拡大することにより，$Cl(V \oplus \mathbf{R}^2) \otimes \mathbf{C}$ から右側のテンソル積への準同型に拡張する．

明らかに，定義域と値域は同次元であり，この写像の像は値域の代数としての生成元を含んでいる．よってこの写像は代数の同型を与える． □

訳注 4) 一般に計量ベクトル空間 V から 1 をもつ代数 W への線形写像 $f: V \to W$ が $f: Cl(V) \to W$ に拡張するための条件は，$f(v) \cdot f(v) + \|v\|^2 1 = 0$ を満たすことである．

系 2.4.2 もし V の次元が $2n$ ならば，$Cl(V)\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ は行列代数 $\mathbf{C}[2^n]$ と同型である．もし V の次元が $2n+1$ ならば，$Cl(V)\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ は代数として $\mathbf{C}[2^n]$ の 2 つのコピーの直和と同型である．

証明 これは，前補題，1 次元と 2 次元の V に対する計算，および $\mathbf{C}[k]\otimes_{\mathbf{C}}\mathbf{C}[m]$ は $\mathbf{C}[km]$ と同型という基本的事実から，帰納法を用いて容易に証明される． □

系 2.4.3 もし V の次元が $2n$ ならば，$(Cl_0(V)\otimes\mathbf{C})^+$ は行列代数 $\mathbf{C}[2^{n-1}]$ と同型である．

証明 これは前系と補題 2.3.3 からただちに得られる． □

前に注意したように，V の次元が奇数のとき，$\omega_{\mathbf{C}}$ は $Cl(V)\otimes\mathbf{C}$ の中心に含まれる．このことから，$Cl(V)\otimes\mathbf{C}$ の行列代数への直和分解は，$\omega_{\mathbf{C}}$ の ±1 固有空間への直和分解と一致することがわかる．よって，写像 $\alpha\mapsto\epsilon(\alpha)$ は 2 つの直和因子を入れ換え，両者の同型を誘導する．したがって $Cl_0(V)\otimes\mathbf{C}$ はこの同型写像に関し対角線に埋め込まれている．

系 2.4.4 もし V の次元が $2n$ ならば，$Cl(V)$ は同型を除いて一意的な有限次元既約表現 $S_{\mathbf{C}}(V)$ をもつ．その次元は 2^n であり，$Cl(V)\otimes\mathbf{C}$ の $S_{\mathbf{C}}(V)$ への作用は同型

$$Cl(V)\otimes\mathbf{C}\to\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(S_{\mathbf{C}}(V))=S_{\mathbf{C}}(V)\otimes S_{\mathbf{C}}(V)^*$$

を誘導する．もし V の次元が $2n+1$ ならば，$Cl(V)$ は同型を除いてちょうど 2 つの有限次元複素既約表現をもつ．これらを $Cl_0(V)$ に制限すると同値な表現 $S_{\mathbf{C}}(V)$ が誘導される．この表現の次元は 2^n であり，クリフォード積による作用は同型

$$Cl_0(V)\otimes\mathbf{C}\to\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(S_{\mathbf{C}}(V))=S_{\mathbf{C}}(V)\otimes S_{\mathbf{C}}(V)^*$$

を誘導する．

証明 Wedderburn の定理により $\mathbf{C}[n]$ は同型を除いて一意的な有限次元複素既約表現 $S^n_{\mathbf{C}}$ をもつ．さらに，この表現に対し写像

$$\mathbf{C}[n] \to \mathrm{End}(S^n_{\mathbf{C}})$$

は代数の同型写像である．V の次元が偶数の場合はこのことからすぐに得られる．V の次元が奇数のときは Wedderburn の定理から，$Cl(V)$ の同値でない有限次元複素既約表現がちょうど 2 つ存在する．これらは，$Cl(V) \otimes \mathbf{C}$ をその直和因子の一方に射影し，その直和因子の既約表現をとることにより得られる．$Cl_0(V) \otimes \mathbf{C}$ は行列代数の直和に対角線に埋め込まれているので，$Cl(V) \otimes \mathbf{C}$ の同値でない 2 つの既約表現を $Cl_0(V) \otimes \mathbf{C}$ に制限すると同値になる．この表現は既約なので，系の最後の主張は Wedderburn の定理から従う． □

系 2.4.5 V の次元を偶数とし，$S_{\mathbf{C}}(V)$ を $Cl(V) \otimes \mathbf{C}$ の (複素) 既約表現としよう．すると $S_{\mathbf{C}}(V)$ は $\omega_{\mathbf{C}}$ の作用のもとに $S^{\pm}_{\mathbf{C}}(V)$ に分解する．この分解は $Cl_0(V) \otimes \mathbf{C}$ 上の加群としての分解になる；一方 $Cl_1(V) \otimes \mathbf{C}$ の作用は $S^{\pm}_{\mathbf{C}}(V)$ を入れ換える．クリフォード積は以下の同型

$$(Cl_0(V) \otimes \mathbf{C})^+ \cong \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(S^+_{\mathbf{C}}(V)),$$
$$(Cl_0(V) \otimes \mathbf{C})^- \cong \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(S^-_{\mathbf{C}}(V)),$$
$$(Cl_1(V) \otimes \mathbf{C})^- \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(S^+_{\mathbf{C}}(V), S^-_{\mathbf{C}}(V)),$$
$$(Cl_1(V) \otimes \mathbf{C})^+ \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(S^-_{\mathbf{C}}(V), S^+_{\mathbf{C}}(V))$$

を誘導する．結果的に，$S^{\pm}_{\mathbf{C}}(V)$ は同型を除いて 2 つ存在する $Cl_0(V) \otimes \mathbf{C}$ の既約表現になっている．

証明 $Cl(V) \otimes \mathbf{C}$ のいろいろな部分の作用が主張のとおりであることを証明するのはやさしい．クリフォード積は同型

$$Cl(V) \otimes \mathbf{C} \cong \mathrm{End}(S_{\mathbf{C}}(V))$$

を誘導するので，結果は簡単に従う． □

系 2.4.6 $Cl(V)$ の有限次元複素既約表現から誘導される $Spin(V)$ の複素表現が同型を除いて一意的に存在する．この表現は**複素スピン表現**とよばれ，

$$\Delta_{\mathbf{C}}: \ Spin(V) \to \mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}(S_{\mathbf{C}}(V))$$

と表わされる.

証明 これは系 2.4.4 と，定義により $Spin(V)$ は $Cl_0(V)$ に含まれることからただちに従う. □

2.5 複素スピン表現

$\Delta_{\mathbf{C}} : Spin(V) \times S_{\mathbf{C}}(V) \to S_{\mathbf{C}}(V)$ を複素スピン表現とする.

命題 2.5.1 V の次元が偶数，例えば $2n$，とすると，群 $Spin(V)$ のこの表現は，2 つの同値でない既約表現 $S_{\mathbf{C}}^{+}$ と $S_{\mathbf{C}}^{-}$ に分解し，どちらも 2^{n-1} 次元である. $Spin(V)$ のこの 2 つの表現は $\Delta_{\mathbf{C}}^{\pm}$ で表わされる. V の次元が奇数，例えば $2n+1$，のときは，$\Delta_{\mathbf{C}}$ は 2^n 次元の $Spin(V)$ の既約表現となる.

証明 これは系 2.2.1 と 系 2.4.4 からただちに得られる. □

上の命題は，$Spin(2k+1)$ の既約表現が $\Delta_{\mathbf{C}}$ のみであるとか，$Spin(2k)$ の既約表現が $\Delta_{\mathbf{C}}^{\pm}$ のみであるとは主張していないことに気をつけよう (実際これらは正しくない). 単に，$Cl_0(V)$ の既約表現を制限して得られる $Spin(n)$ の既約表現であるという点において，これらは特別なものである.

例. (i) $Cl(\mathbf{R}^2) \cong \mathbf{H}$ であり，よって $Cl(\mathbf{R}^2) \otimes \mathbf{C}$ は $\mathbf{C}[2]$ と同型である. したがってスピン表現は

$$\Delta_{\mathbf{C}} : \ Spin(\mathbf{R}^2) \to \mathrm{Aut}(\mathbf{C}^2)$$

となる. この表現は，2 つの 1 次元表現

$$\Delta_{\mathbf{C}}^{\pm} : \ Spin(\mathbf{R}^2) \to \mathrm{Aut}(S_{\mathbf{C}}^{\pm}(\mathbf{R}^2))$$

の直和に分解する. もちろん，$Spin(\mathbf{R}^2) \cong S^1$ は標準的に $\mathbf{C} \subset \mathbf{H}$ に埋め込まれる. すでにみたように，埋め込み $\mathbf{H} \subset \mathbf{C}[2]$ のもとに，この円周は

$$\alpha \in S^1 \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

により埋め込まれている．$\omega_{\mathbf{C}} = ie_1e_2$ なので，元 e_1e_2 は $-i$ 倍で $S^+_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^2)$ に作用する．よって $S^+_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^2)$ への作用は S^1 の $\mathbf{C}$ への標準的作用の共役と同じで，$S^-_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^2)$ への作用は S^1 の $\mathbf{C}$ への標準的作用と同じである．

(ii) 2.2 節の例 (iii) でみたように $Spin(\mathbf{R}^3)$ は $SU(2)$ と同型である．この場合のスピン表現 $\Delta_{\mathbf{C}}$ は $SU(2)$ の $\mathbf{C}^2$ への標準的表現である．

(iii) 同じく 2.2 節の例 (iv) でみたように $Spin(\mathbf{R}^4)$ は $SU(2) \times SU(2)$ と同型である．スピン表現 $\Delta^+_{\mathbf{C}}$ は単に $Spin(\mathbf{R}^4)$ を第 1 成分に射影し，$SU(2)$ を $\mathbf{C}^2$ に標準的に作用させたものである．同様に $\Delta^-_{\mathbf{C}}$ は第 2 成分への射影と標準的表現を合成したものである．明らかに，この 2 つの表現は同値ではないが，$Spin(4)$ の外部自己同型のもとには同値である．

2.6 群 $Spin^c(V)$

$Spin^c(V)$ は，$Cl(V) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ の可逆元全体のなす乗法群の部分群で，$Spin(V)$ と長さ 1 の複素数のなす単位円で生成されるものとして定義される．

補題 2.6.1 同型 $Spin^c(V) \cong Spin(V) \times_{\{\pm 1\}} S^1$ が存在する．

証明 長さ 1 の複素数のなす円周は $Cl(V) \otimes \mathbf{C}$ の中心にあるので $Spin(V)$ と可換である．よって定義により，自然な全射

$$Spin(V) \times S^1 \to Spin^c(V)$$

が存在する．この写像の核は単に (α, α^{-1})，ただし $\alpha \in Spin(V) \cap S^1$，の全体である．しかしながら，すでにみたように $Spin(V)$ とスカラーとの共通部分は ± 1 である．よって結果を得る． □

$Spin^c(V)$ を部分群 $\{\pm 1\}$ で割った商は $SO(V) \times S^1$ である．よって $Spin^c(V)$ は $SO(V) \times S^1$ の 2 重被覆であり，どちらの成分上でも非自明である．これはまさに，自然に埋め込まれた $SO(V) \times S^1 \subset SO(V \oplus \mathbf{R}^2)$ の，写像 $Spin(V \oplus \mathbf{R}^2) \to SO(V \oplus \mathbf{R}^2)$ のもとでの原像と同じ群である．$Spin(V)$ の $Cl(V)$ への共役作用は $Spin^c(V)$ の $Cl(V) \otimes \mathbf{C}$ への共役作用に拡張する．この $Spin^c(V)$ の作用

は実クリフォード代数を保ち，$Spin(V)$ の共役作用の像と同じ $SO(V)$ を像としてもつ．特にこの作用の核は $\{\pm 1\} \times_{\{\pm 1\}} S^1 \cong S^1$ である．

$Spin(V)$ は自然に $Spin^c(V)$ の部分群

$$Spin(V) \times_{\{\pm 1\}} \{\pm 1\}$$

と同一視される．

補題 2.6.2 $\rho : Spin(V) \to GL_{\mathbf{C}}(W)$ を複素表現とし，$\rho(-1) = -1$ と仮定しよう．すると ρ の拡張 $\widehat{\rho} : Spin^c(V) \to GL_{\mathbf{C}}(W)$ が一意的に存在する．

証明 ρ は複素表現なので，長さ 1 の複素数の積 $S^1 \times W \to W$ と可換である．よって ρ は写像 $\rho' : Spin(V) \times S^1 \to GL_{\mathbf{C}}(W)$ に拡張する．$\rho(-1) = -1$ であるということはこの表現は主張どおりの $\widehat{\rho} : Spin^c(V) \to GL_{\mathbf{C}}(W)$ に落ちるということを意味する． □

系 2.6.3 $\Delta_{\mathbf{C}} : Spin(V) \to GL_{\mathbf{C}}(S_{\mathbf{C}}(V))$ を複素スピン表現とする．するとこの表現の拡張 $\widehat{\Delta}_{\mathbf{C}} : Spin^c(V) \to GL_{\mathbf{C}}(S_{\mathbf{C}}(V))$ が一意的に存在する．さらに，もし V の次元が偶数ならば，$\widehat{\Delta}_{\mathbf{C}}$ は $\widehat{\Delta}^+_{\mathbf{C}} \oplus \widehat{\Delta}^-_{\mathbf{C}}$ と分解する．ここに $\widehat{\Delta}^{\pm}_{\mathbf{C}}$ は $\Delta^{\pm}_{\mathbf{C}}$ の一意的な拡張である．

証明 示すべきことは $\Delta_{\mathbf{C}}(-1) = -1$ のみである．しかし，$\Delta_{\mathbf{C}}$ は $\mathbf{C}$-代数 $Cl(V) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ の表現の制限であるから，これは明らかである． □

3章

スピン束とディラク作用素

3.1 スピン束とクリフォード束

スピン束. 正定値内積をもつ実ベクトル空間 V を固定する．本章をとおして V の次元は2以上と仮定する．$P \to X$ を主 $SO(V)$-束とする．この束がいつ主 $Spin(V)$-束に持ち上がるか，すなわち，いつ主 $Spin(V)$-束 $\widetilde{P} \to X$ で $Spin(V)$ の中心 ± 1 によるその商が $SO(V)$ 束として P に同型になるものが存在するか，を理解したい．これはもちろん，代数的位相幾何学または障害理論の標準的問題で，その答はよく知られている．

補題 3.1.1 $P \to X$ が主 $Spin(V)$-束に持ち上がるための必要十分条件は第2スティフェル・ホィットニー類 $w_2(P) \in H^2(X; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ が0であることである．

このことは次の同値ないい方でも表現できる．すなわち，$P \to X$ が持ち上がるための必要十分条件は，準同型 $\pi_1(P) \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ でファイバーに制限すると自明でない準同型 $\pi_1(SO(V)) \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ が誘導されるものが存在することであるともいえるし，また同値なことには，微分 $d_2 : H_2(X; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \to H_1(SO(V); \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ が自明であることともいえる．さらに同値なことには，P が持ち上がるための必要十分条件は，X の2次元骨格上で P が自明であることでもある．もし持ち上がりが存在するとすると，持ち上がりの同値類全体は群 $H^1(X; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ の

torseur になる[訳注 1)].

上記のような持ち上がりの一つを P に対する**スピン構造**という．特別な場合として X がリーマン多様体で，P が X の接束 (または余接束) に同伴するときは，$\widetilde{P}$ はリーマン多様体 X のスピン構造であるという．

$P \to X$ を主 $SO(n)$-束とし，スピン構造 $\widetilde{P} \to X$ をもつとする．このとき同伴された**複素スピノル束**

$$\widetilde{P} \times_{Spin(n)} S_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^n)$$

が表現 $\Delta_{\mathbf{C}} : Spin(n) \to \mathrm{Aut}(S_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^n))$ から誘導される．この束を $S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ で表わす．P が奇数 n に対する $SO(n)$-束のとき，$S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ は (複素) $2^{\frac{n-1}{2}}$ 次元ベクトル束である．n が偶数のときは，$\Delta_{\mathbf{C}}$ の $\Delta^+_{\mathbf{C}} \oplus \Delta^-_{\mathbf{C}}$ への分解に対応してベクトル束の分解

$$S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P}) = S^+_{\mathbf{C}}(\widetilde{P}) \oplus S^-_{\mathbf{C}}(\widetilde{P}),$$

$$S^{\pm}_{\mathbf{C}}(\widetilde{P}) = \widetilde{P} \times_{Spin(n)} S^{\pm}_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^n)$$

が存在する．この 2 つの束は P に同伴されたプラスおよびマイナススピノル束とよばれる．これらは複素 $2^{\frac{n}{2}-1}$ 次元の複素ベクトル束である．すでにみたように $Spin(n)$ はコンパクトなので，これらの束は同型を除いて一意的なエルミート内積をもつ．実際，これらの束はクリフォード代数の $S_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^n)$ への作用から誘導されるので，計量を $Pin(\mathbf{R}^n)$ の作用で不変であるように選ぶことができる．これは，$\mathbf{R}^n \subset Cl(\mathbf{R}^n)$ の長さ 1 のベクトルによるクリフォード積は $S_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^n)$ の等長写像となることを意味する．今後このような計量を選んだことを暗に仮定する．

$Spin^c$-束. $Spin$ を $Spin^c$ に置き換えて，上と同様の問題を考えてみよう．中心で割ることによって得られる写像 $Spin^c(n) \to SO(n)$ を考え，主 $SO(n)$-

---

訳注 1) 一般に加群 G の torseur (torsor と書いてある文献もある) とは集合として G と同型であるが零元が指定されていないものをいう．例えば 1 点上の主 G 束は G の torseur である．$\mathbf{R}^2$ 内の 1 次元アフィン部分空間は $\mathbf{R}$ の torseur である．torseur の適切な訳語がみあたらないので無理に訳さないことにする．ここで述べられていることについては [7], p.84 を参照せよ．

束 $P \to X$ がいつ主 $Spin^c(n)$-束に持ち上がるかを問題にする．$Spin(n)$ で割ることにより与えられる写像 $Spin^c(n) \to S^1$ は，任意の主 $Spin^c(n)$-束に対し同伴複素直線束 $\mathcal{L} \to X$ を定める．これを $Spin^c(n)$-束の**行列式直線束**とよぶ．もしこの $Spin^c(n)$-束が主 $SO(n)$-束を持ち上げたものならば，この行列式直線束の第1チャーン類 $c_1(\mathcal{L})$ は2を法として $w_2(P)$ と一致する．逆にこの2を法とした条件を満たす第1チャーン類をもつような複素直線束 $\mathcal{L} \to X$ が与えられると，P の $Spin^c(n)$-持ち上げで行列式直線束が $\mathcal{L}$ と同型になるものが存在する．完全系列

$$\{1\} \to S^1 \to Spin^c(n) \to SO(n) \to \{1\}$$

から，P の主 $Spin^c(n)$-束への持ち上げ全体は群 $H^2(X;\mathbf{Z})$ の torseur をなすことがわかる．$\alpha \in H^2(X;\mathbf{Z})$ により $Spin^c(n)$-持ち上げを変形すると，行列式直線束の第1チャーン類が 2α だけ変わる．

主 $SO(n)$-束の $Spin^c(n)$-持ち上げ $\widetilde{P}$ が与えられたとき，複素ベクトル束

$$S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P}) = \widetilde{P} \times_{Spin^c(n)} S_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^n)$$

を作ることができる．この場合も**複素スピノル束**とよばれる．$Spin^c(n)$-持ち上げを $\alpha \in H^2(X;\mathbf{Z})$ だけずらすと，$S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ は $S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P}) \otimes L_\alpha$ に置き換わる．ここに L_α は第1チャーン類が α の複素直線束である．

4次元多様体の正規直交枠束に対する $Spin^c(4)$-持ち上げ． 4次元多様体を研究するにあたって $Spin^c$-構造を考えることの大きな利点の一つは，すべての向き付けられた4次元多様体は $Spin^c$-構造をもつことである．

補題 3.1.2 X を向き付けられた4次元多様体とし，$P \to X$ を接束の正規直交枠束とする．すると P の $Spin^c(4)$-束への持ち上げ $\widetilde{P}$ が存在する．

証明 $Spin^c$-持ち上げの存在を証明するには $w_2(X)$ が整係数類 $c \in H^2(X;\mathbf{Z})$ に持ち上がることをみさえすればよい．まず任意の類 $x \in H_2(X;\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ に対し，$w_2(X)$ の x に対する値は次のようにして与えられることに注意しよう：x を (向き付け不可能もありうる) 埋め込まれた閉曲面として X 内に実現し，この曲面の2を法とした自己交点数をとればよい．さて，$w_2(X)$ が整係数類に持ち上がることをみるには，その整係数ボクシュタイン $\delta w_2(X)$ が0であること

をみればよい．しかし，この捩れ整係数類[訳注 2)]が 0 であるための必要十分条件は，任意の 3 次元 $\mathbf{Z}/2^k\mathbf{Z}$ 類で値をとって 0 になることである．任意のそのような類は滑らかな $\mathbf{Z}/2^k\mathbf{Z}$-多様体[訳注 3)]から X への写像で代表される．よって 3 次元 $\mathbf{Z}/2^k\mathbf{Z}$ 類に対する $\delta w_2(X)$ の値は，対応する 3 次元 $\mathbf{Z}/2^k\mathbf{Z}$-多様体のボクシュタインに対する $w_2(X)$ の値に等しい．したがって $w_2(X)$ が $H^2(X;\mathbf{Z})$ の捩れ整係数類上で消えることをみさえすればよい．しかしこれは上の注意と，任意の 2 次元捩れ整係数類は自己交点数 0 の滑らかに埋め込まれた向き付けられた曲面として実現されることから明らかである． □

クリフォード束およびそのスピノル束への作用． P を $SO(n)$-束とする．P の持ち上げとしての *Spin* または $Spin^c$-束 $\widetilde{P}$ の同伴複素スピノル束を構成できるのみでなく，P の同伴複素クリフォード代数束を構成できる．$SO(n)$ はクリフォード代数 $Cl(\mathbf{R}^n)$ に作用するので，$P \to X$ に束

$$Cl(P) = P \times_{SO(n)} Cl(\mathbf{R}^n)$$

を同伴させることができる．これは局所自明なクリフォード代数束である．これはスピン構造はなくても定義できることに注意しよう．複素化されたクリフォード代数束

$$Cl(P) \otimes \mathbf{C} = P \times_{SO(n)} (Cl(\mathbf{R}^n) \otimes \mathbf{C})$$

も同様に定義できる．この代数束は $Cl(P) = Cl_0(P) \oplus Cl_1(P)$ の形に分解することに注意しよう．また元 $\omega_{\mathbf{C}}$ は $SO(V)$ の作用で不変なので，$\omega_{\mathbf{C}}$ は 2 乗したら 1 になる $Cl(P)$ の切断を定める．この切断を用いて分解

$$Cl(P) \otimes \mathbf{C} = (Cl(P) \otimes \mathbf{C})^+ \oplus (Cl(P) \otimes \mathbf{C})^-$$

が得られる．P が奇数 n に対する $SO(n)$-束のとき，これは直交する 2 つの代数束への分解になる．

訳注 2) $\delta w_2(X) \in H^3(X;\mathbf{Z})$ で，$2\delta w_2(X) = \delta(2w_2(X)) = 0$.

訳注 3) $\mathbf{Z}/2^k\mathbf{Z}$-多様体はモーガン・サリバンの次の論文で導入された概念である：J. Morgan and D. Sullivan, The transversality characteristic class and linking cycles in surgery theory, Annals of Math. 99(1974), 463-544 (これは吉田朋好氏のご教示による)．しかしこの補題の証明を注意深く読めばわかるように，この概念をもちだす必要はない．

スピンまたは $Spin^c$-構造が存在するとき，上のクリフォード代数束は複素スピノル束に作用する．$S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P}) \to X$ を同伴複素スピノル束とする．次のようにして $S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ を複素代数束 $Cl(P)\otimes\mathbf{C}$ 上の加群束とすることができる．すなわち，$Spin(\mathbf{R}^n)$ または $Spin^c(\mathbf{R}^n)$ の $Cl(\mathbf{R}^n)$ への共役作用

$$\alpha\cdot\lambda = \alpha\lambda\alpha^{-1}$$

により $Cl(P)$ は $\widetilde{P}$ の同伴束ともみなすことができる．$Cl(\mathbf{R}^n)\otimes\mathbf{C}$ の $S_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^n)$ へのクリフォード積は，この両者への $Spin(n)$ または $Spin^c(n)$ の作用と可換である．すなわち，$\lambda\in Cl(\mathbf{R}^n)\otimes\mathbf{C}$, $\sigma\in S_{\mathbf{C}}(n)$, そして $\alpha\in Spin(n)$ または $\alpha\in Spin^c(n)$ に対し，

$$(\alpha\lambda\alpha^{-1})\cdot(\alpha\sigma) = \alpha(\lambda\cdot\sigma)$$

が成り立つ．したがってクリフォード積の作用は大域的に意味をもち，作用

$$(Cl(P)\otimes\mathbf{C})\otimes S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P}) \to S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$$

で，各ファイバー上では通常のクリフォード積になっているものが得られる．n が偶数のときには，$Cl_0(P)\otimes\mathbf{C}$ の作用は $S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ の $S^{\pm}_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ への分解を保ち，$Cl_1(P)\otimes\mathbf{C}$ の作用は 2 つの成分を入れ換える．

接束と余接束の場合． X をリーマン多様体，$P\to X$ を接束の同伴 $SO(n)$-枠束とする．すると P の同伴クリフォード代数束 $Cl(X)$ が得られる．定義により，クリフォード代数束 $Cl(X)$ は X の接束から構成され，したがって接束の外積代数に新しい代数構造を定める．もちろん X はリーマン多様体なので接束と余接束には標準的同一視がある．よって $Cl(X)$ は，余接束の外積代数の新しい代数構造とみなすことができる．この同一視を複素線形に拡張し，複素化されたクリフォード代数を，接束または余接束の複素化された外積代数の新しい代数構造とみなす．

さて $\widetilde{P}\to X$ を X の $Spin^c$-構造，すなわち $P\to X$ の $Spin^c$-構造とする．このとき束 $Cl(X)$ のスピノル束 $S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ へのクリフォード積による作用があり，これは微分形式の空間のクリフォード積による作用を定める．1 次微分形式とベクトル場によるクリフォード積の双対性は次のように表現される．α を複素

数値 1 次微分形式とすると，α のスピノル場 s への点 u における作用は

$$\alpha \cdot s(u) = \sum_i \alpha(e_i) e_i \cdot s(u) \tag{3.1}$$

で与えられる．ここに $\{e_1, \cdots, e_n\}$ は TX_u の正規直交基底である．

例. (i) 標準的平坦計量を与えられた 2 次元トーラス T^2 を考えよう．その接束と余接束は自明である．この 2 つの束にスピン構造を与えたい．この場合スピン構造は平坦な S^1-束でホロノミーを $\{\pm 1\}$ に値をもつものであり，表現 $\pi_1(T^2) \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ で決まる．プラススピノル束は同じホロノミーをもつ平坦直線束であり，マイナススピノル束はその逆直線束である．

(ii) Σ を種数 g の向き付けられた閉リーマン面とする．$Spin(2) \to SO(2)$ は 2 重被覆 $S^1 \to S^1$ なので，接束に対するスピン構造は次数 $1-g$ の複素直線束であり，この 2 乗は接束と同型である．マイナススピノル束はこの直線束である (これはリーマン面の反標準束の 2 乗根 $\sqrt{K_X^{-1}}$ である)[訳注 4)]．プラススピノル束はその逆直線束，すなわち標準束 K_X の 2 乗根である．

3.2 接続と曲率

主束の接続. $P \to X$ を滑らかな多様体上の滑らかな主 G-束とする．各点 $p \in P$ において P の接空間の部分空間 $T^v P_p$ を，射影のファイバーに接する接ベクトル全体からなるものとする．これらの部分空間のなす分布を**垂直分布**とよぶ．もちろん垂直分布は完全積分可能で，各ファイバーが積分多様体である．束 P の**接続**とは分布 $H = \{H_p\}_{p \in P}$，つまり滑らかに変化する接空間の線形部分空間の属 (もっと端的にいえば接束の部分束)，で各点で垂直分布の補空間をなし，群 G の作用で不変なもののことである．ここで，分布 H が垂直分布の補空間をなすとは，単に，射影により H_p が p の像における X の接空間に同型にうつされることを意味する．この条件は H を**水平分布**とよぶことにより表現される．

訳注 4) これは 2.5 節，例 (i) より従う．

P 上の接続が与えられると，G のリー環 $\mathfrak{g}$ に値をもつ P 上の 1 次微分形式が同伴される．この 1 次微分形式は**接続形式**とよばれる．その $p \in P$ での値は次のように定義される線形写像 ω_p である：

$$\omega_p:\ TP_p \to T^v P_p \cong \mathfrak{g}.$$

ここに最初の写像は部分空間 H_p を核とする射影で，2 番目の同型写像は点 p における G の作用の引き起こす同型の逆写像である．分布の G-不変性は，ω が随伴作用で変換されるという条件に翻訳される：任意の $h \in G$，任意の $p \in P$，そして任意の $\tau \in TP_p$ に対し

$$\omega_{ph}(\tau \cdot h) = h^{-1}\omega_p(\tau)h$$

が成り立つ．また ω_p のファイバーへの制限は，G の左不変モーラー・カルタン形式と同一視できる．これは，群の任意の元の左作用で不変で，単位元においては恒等写像であるような，唯一の $\mathfrak{g}$ に値をもつ G 上の 1 次微分形式である．

これら 2 つの性質が接続形式を特徴づける．接続形式が与えられると，この 1 次微分形式の核として水平分布が復元される．

主束 P に接続が与えられると，G のベクトル空間 V への線形表現からくるベクトル束 $E = P \times_G V$ 上に接続が誘導される．この接続の自然な見方は，共変微分

$$\nabla:\ \Omega^0(X;E) \to \Omega^1(X;E)$$

とみる見方である．これはスカラー ($\mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$) 上線形であり，スカラー値関数環上通常の d に関し微分である：すなわち任意の切断 $\sigma \in \Omega^0(X;E)$ と任意の X 上のスカラー値関数 f に対し

$$\nabla(f \cdot \sigma) = f \cdot \nabla(\sigma) + df \otimes \sigma$$

が成り立つ．この共変微分の定義は次のようにして与えられる．$x \in X$ のまわりの E の局所切断を σ とし，$\tau \in TX_x$ としよう．x を通り x での接ベクトルが τ であるような X の曲線 γ を選び，次に γ を P の水平曲線 $p(t)$，つまり各点における接ベクトルが水平分布に含まれるような P の曲線，に持ち上げる．すると σ の $E|_\gamma$ への制限は，ある V 値関数 $v(t)$ を用いて $[p(t), v(t)]$ と表わされる．∇ は

$$\nabla(\sigma)(\tau) = \left[p, \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}\right]$$

で定義される．これが関数環上の微分として矛盾なく定義されていることは簡単に示すことができる．

G が $GL(V)$ の部分群として埋め込まれているときは，E の共変微分から主 G-束のもとの接続を復元できる．例えば，主 $SO(n)$-束と $SO(n)$ の $\mathbf{R}^n$ への標準的表現に同伴されるベクトル束の共変微分が主 $SO(n)$-束の接続から誘導されるための必要十分条件は，共変微分 ∇ が任意のベクトル束の局所切断 σ_0, σ_1 に対し

$$d\langle\sigma_0, \sigma_1\rangle = \langle\nabla(\sigma_0), \sigma_1\rangle + \langle\sigma_0, \nabla(\sigma_1)\rangle$$

が成り立つことである．一方，自明な表現に同伴された共変微分は積束の通常の微分であり，したがって主束の接続に関する情報はなにも反映しない．

任意のスカラー値 i 次微分形式 ω と任意の E の切断 σ に対し

$$\nabla(\omega \otimes \sigma) = d\omega \otimes \sigma + (-1)^{\deg \omega}\omega \wedge \nabla(\sigma)$$

と定義することにより，∇ は

$$\nabla:\ \Omega^i(X; E) \to \Omega^{i+1}(X; E)$$

に拡張される．

局所自明化を用いた接続形式と共変微分の公式． $P \to X$ を接続 $\omega \in \Omega^1(P; g)$ をもつ主 G-束とする．ある開集合 U に対する $P|_U$ の局所自明化を一つ固定する．この自明化を固定することは切断 $\sigma_0 : U \to P|_U$ を一つとることと同一視できる．このとき 1 次微分形式 $\sigma_0^*(\omega) \in \Omega^1(U; g)$ が得られる．これが与えられた局所自明化に関する接続形式である．$G \subset GL(n, \mathbf{R})$ であり，したがって $g \subset M_{n\times n}(\mathbf{R})$ とすると，$\sigma_0^*(\omega)$ は行列に値をもつ 1 次微分形式 $(\widetilde{\omega}_{i,j})$ であり，その値は各点で部分リー環 g に属する．例えば $G = SO(n)$ のときは，$(\widetilde{\omega}_{i,j})$ は反対称行列に値をもつ 1 次微分形式である；つまり $\widetilde{\omega}_{i,j} = -\widetilde{\omega}_{j,i}$．さて $\sigma : U \to P|_U$ を別な切断とする．すると滑らかな写像 $h : U \to G$ で $\sigma(u) = \sigma_0(u)h(u)$ となるものが存在する．上の記述から容易に導かれるように

$$\sigma^*(\omega)_u = h(u)^{-1}\sigma_0^*(\omega)_u h(u) + h(u)^{-1}dh_u$$

が成り立つ．別ないい方をすれば，もし初めの局所自明化に関し $\sigma(u) = (u, h(u))$ であるとし，また τ が u における U の接ベクトルとすると，

$$\omega(d\sigma_u(\tau)) = h(u)^{-1}\widetilde{\omega}(\tau)h(u) + h(u)^{-1}dh_u(\tau)$$

が成り立つ．

さて，表現 $\rho: G \to GL(V)$ とこれから誘導される表現 $d\rho: g \to \mathrm{End}(V)$ が与えられているとし，$E \to X$ を同伴ベクトル束 $P \times_G V$ とする．このとき，$P|_U$ の自明化は $E|_U$ の自明化を誘導する：$E|_U = U \times V$ としよう．この自明化に関し ∇ を計算する．∇ は写像

$$\nabla:\ \Omega^0(U;V) \to \Omega^1(U;V)$$

を定める．この $E|_U$ の自明化に関し $\alpha: U \to V$ は切断

$$\sigma(u) = (u, \alpha(u))$$

を定めるとしよう．このとき

$$\nabla(\sigma) = d\rho(\widetilde{\omega})(\alpha) + d\alpha$$

と表わされる．

接続の曲率. ω を g に値をもつ P 上の 1 次微分形式とするとき，点 p における接ベクトルの組 (τ_1, τ_2) に対する値が

$$[\omega_p(\tau_1), \omega_p(\tau_2)]$$

である 2 次微分形式を $\frac{1}{2}[\omega \wedge \omega]$ により表わす．

g に値をもつ P 上の k 次微分形式で，少なくとも一つの垂直ベクトルを含む k 個の接ベクトルに対しては 0 になり，また G-作用が随伴作用を通して変換されるもの[訳注 5)]は，X 上の $\mathrm{ad}P$ に値をもつ k 次微分形式と同一視されることに気をつけよう．ここに $\mathrm{ad}P$ は随伴束 $P \times_{\mathrm{ad}} g$ である．

補題 3.2.1 ω を X 上の主 G-束 P の接続形式とする．すると 2 次微分形式

訳注 5) P 上の g-値 k 次微分形式 α に対する G-作用が随伴作用を通して変換されるとは，R_h を $h \in G$ による右作用とするとき，$R_{h^{-1}}^*\alpha = \mathrm{ad}(h)\alpha$ となるときをいう．

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega]$$

は $\mathrm{ad}P$ に値をもつ X 上の 2 次微分形式を P 上に引き戻したものである.

この補題の証明はやさしい練習問題である.

この X 上の $\mathrm{ad}P$ に値をもつ 2 次微分形式を接続の**曲率形式**という.

$U \subset X$ を開集合とし, $P|_U$ の自明化が与えられているとしよう. 上に説明したように, このとき接続形式 ω は G のリー環に値をもつ U 上の 1 次微分形式を定める. $E \to X$ を P と表現 $\rho : G \to GL(\mathbf{R}^n)$ の同伴ベクトル束とする. このとき $d\rho$ は G のリー環の $n \times n$ 行列への表現になる. さらに $P|_U$ の自明化は $E|_U$ の自明化と $\mathbf{R}^n$ の標準的基底からくる基底 $e_1, \cdots, e_n$ を誘導する. このとき $E|_U$ の接続は

$$\nabla(e_i) = \sum_j (d\rho(\omega)_{j,i}) \otimes e_j$$

で与えられる. 曲率形式は

$$\Omega(e_i) = \sum_j \Omega_{j,i} \otimes e_j,$$

ただし

$$\Omega_{j,i} = d\omega_{j,i} + \sum_k \omega_{j,k} \wedge \omega_{k,i}$$

で与えられる.

$G = SO(n)$ のときは, 曲率 $(\Omega_{i,j})$ は 2 次微分形式を係数とする反対称行列である；つまり

$$\Omega_{i,j} = -\Omega_{j,i}.$$

主 G-束 $P \to X$ と G のベクトル空間 V への表現の同伴ベクトル束を E とする. E の共変微分 ∇ に対し, 作用素

$$\nabla \circ \nabla : \ \Omega^0(X; E) \to \Omega^2(X; E)$$

は関数環上線形であることが直接計算することにより確かめられ, よって

$$\Omega^2(X;\mathrm{End}(E))$$

の切断になる．この切断は単に接続の曲率の，写像 $g \to \mathrm{End}(V)$ のもとでの像にほかならないことが直接確かめられる．実際，上の局所自明化を用いて

$$\begin{aligned}\nabla \circ \nabla(e_i) &= \nabla\left(\sum_j \omega_{j,i} \otimes e_j\right) \\ &= \sum_j d\omega_{j,i} \otimes e_j - \sum_j \omega_{j,i} \wedge \nabla(e_j) \\ &= \sum_j d\omega_{j,i} \otimes e_j - \sum_k \omega_{k,i} \wedge \left(\sum_j \omega_{j,k} \otimes e_j\right) \\ &= \sum_j d\omega_{j,i} \otimes e_j + \sum_j \left(\sum_k \omega_{j,k} \wedge \omega_{k,i}\right) \otimes e_j \\ &= \sum_j (d\omega_{j,i} + (\omega \wedge \omega)_{j,i}) \otimes e_j \\ &= \sum_j \Omega_{j,i} \otimes e_j\end{aligned}$$

となる．この式の意味するところをもっと具体的に書き表わすと，$E|_U$ の自己準同型束の切断として

$$\nabla_{v_r} \circ \nabla_{v_s} - \nabla_{v_s} \circ \nabla_{v_r} - \nabla_{[v_r,v_s]} = \Omega(v_r, v_s) = \sum_{i,j} \Omega_{j,i}(v_r, v_s) e_j \otimes e_i^*$$

が成り立つということになる．(ここに $\Omega_{j,i}$ は X 上の実数値 2 次微分形式で，$\Omega_{j,i}(v_r, v_s)$ は $\Omega_{j,i}$ の接ベクトルの順序対 (v_r, v_s) に対する値である．)

曲率形式を使って通常の実数値閉形式を作り出すことができる．これは，リー環上の同次多項式で，リー環への随伴作用で不変なものに曲率形式を代入して得られる．こうして得られる微分形式は閉形式であり，接続を取り換えると完全形式の差だけ変わる (これを証明するのは単純な練習問題である)．よってこのような微分形式の代表するコホモロジー類は接続の選び方によらず一定で，束の**特性類**とよばれる．実チャーン類やポントリャーギン類はこのようにして得られる．詳細については例えば [4] または [16] をみよ．

主束 $\pi: P \to X$ 上には1つ以上の接続形式がある．実際，任意の接続形式 ω と任意の $\mathrm{ad}P$ に値をもつ X 上の1次微分形式 η に対し，和 $\omega + \pi^*\eta$ は接続形式になる．このようにしてすべての接続形式を得る．よって P の接続形式全体の空間は，ベクトル空間 $\Omega^1(X; \mathrm{ad}P)$ に同伴したアファイン空間になる．

例． (i) $P \to X$ を $U(1)$-束とする．$U(1)$ のリー環は純虚数全体のなす部分集合 $i\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ である．P の接続形式 $\omega \in \Omega^1(P; i\mathbf{R})$ は，$U(1)$ の作用で不変であり，任意の $p \in P$ において $p \mapsto ph$ により定義される写像 $U(1) \to P$ で，ω を $U(1)$ に引き戻すと $id\theta$ になるという性質をもつ．P 上の2次微分形式 $d\omega$ は X 上の $i\mathbf{R}$ に値をもつ2次微分形式 Ω を引き上げたものである．この微分形式 Ω が接続の曲率形式である．同伴複素直線束の**第1チャーン類**とは，閉形式 $\frac{i}{2\pi}\Omega$ で代表されるコホモロジー類と定義される．構造群を $U(1)$ の代わりに $SO(2)$ とみなすと，リー環は 2×2 の反対称行列全体である．$U(1)$ のリー環の生成元 i は元 $e_1 \wedge e_2$ に対応し，これは行列

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

に対応する．この記号のもとに，接続形式は

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega/i \\ \omega/i & 0 \end{pmatrix}$$

と書くことができ，曲率形式は

$$\begin{pmatrix} 0 & -\Omega/i \\ \Omega/i & 0 \end{pmatrix}$$

と書ける．

X を2次元コンパクト向き付け可能多様体としよう．X の1つの複素構造に対する接束の1次元複素ベクトル束としての $U(1)$-構造を1つとり，主 $U(1)$-束 P を考える．この P に対して上の議論を適用し，$SO(2)$-束としての曲率形式が得られる．この曲率形式の行列としての $(1,2)$-成分を**ガウス曲率**と定義する．よってガウス曲率は $-\Omega/i = i\Omega$ である．さて，$U(1)$-束としての第1チャーン類を X 上で積分することにより位相不変量第1チャーン数が得られるが，この

ことは次のガウス・ボンネの定理と一致する．すなわちガウス曲率の 2π 倍を X 上で積分するとオイラー数になる．よって X の第1チャーン数はオイラー数に一致する．

ゲージ変換群の作用． **ゲージ変換**とは単に主束の束自己同型のことである．$P \to X$ のゲージ変換群，すなわち束自己同型群による接続形式全体のなす空間への作用を調べたい．まず，微分同相写像 $\varphi : P \to P$ が，G の作用とも X への射影とも可換のとき，φ は P の束自己同型であるという．これらは群をなし，$\mathrm{Aut}(P)$ と記され，P に左から作用し G の右作用と可換である．このような束自己同型は P から G への関数で，任意の $f \in G$ に対し $\psi(ph) = h^{-1}\psi(p)h$ を満たすものであると解釈できる．その関係は，関数 $\psi : P \to G$ を束自己同型 $\varphi(p) = p\psi(p)$ に対応させることにより説明される．逆に ψ から $\varphi(p) = p\psi(p)$ により定義される φ は X への射影と可換である．ψ に対する上の式は，φ が G-作用と同変であることと同値である．

ω を接続形式とし φ を束自己同型とすると，$\varphi^*\omega$ はまた接続形式になる．これは

$$\varphi^*(\omega) = \varphi^{-1}\omega\varphi + \varphi^{-1}d\varphi$$

と表わせる．これを理解するには，この式を P 上の g に値をもつ1次微分形式の式とみなすのが最も簡単である[訳注 6)]．この接続への作用が曲率に及ぼす影響は φ による共役作用である；すなわち Ω を接続 ω の曲率形式とし，Ω' を $\varphi^*\omega$ の曲率形式とすると，

$$\Omega' = \varphi^{-1}\Omega\varphi$$

となる．特に曲率のノルムの2乗はゲージ変換群の作用で不変である．

レビ・チビタ接続． $P \to X$ をリーマン多様体 X の接束に同伴する主 $SO(n)$-束とする．上にみたように，接束の接続で同伴する主束と両立するもの，すなわち $SO(n)$-接続から誘導されるもの，はたくさん存在する．しかし**レビ・チビタ接続**とよばれるある意味で最善のものが一意的に存在する．

訳注 6) θ を G のモーラー・カルタン形式とするとき $\varphi^*(\omega) = ad(\varphi)\omega + \theta$ という式であると理解するのが最もわかりやすいということである．

この接続を導入するために，座標近傍 $U \subset X$ 上の局所座標 $(x^1, \cdots, x^n)$ をとろう．v_i で接ベクトル $\partial/\partial x^i$ を表わし，この局所座標に関し計量は対称行列 $g_{i,j}$ で表わされるとしよう．さらに，x^i に関する通常の微分を ∂_i で表わす．さて，任意の共変微分に対し**クリストッフェル記号**とよばれる n^3 個の関数 $\Gamma^i_{j,k}$ で

$$\nabla_{v_i}(v_j) = \sum_{k=1}^{n} \Gamma^k_{i,j} v_k$$

により定義されるものが存在する．この接続が $SO(n)$-接続であるための条件は

$$\langle \nabla_{v_k}(v_i), v_j \rangle + \langle v_i, \nabla_{v_k}(v_j) \rangle = \partial_k \langle v_i, v_j \rangle$$

を満たすことである．クリストッフェル記号を用いてこれを表わすと

$$(g \cdot \Gamma_k)^{tr} + g \cdot \Gamma_k = \partial_k g,$$

ただし Γ_k は (r,s)-成分を $\Gamma^r_{k,s}$ とする行列，となる．レビ・チビタ接続であるためのもう一つの条件は，接続が**捩れをもたない**ことである．この条件は接束の接続に対してのみ定義される条件である．この条件のいうところは，X 上のベクトル場の組 V, W に対し，

$$\nabla_V(W) - \nabla_W(V) = [V, W]$$

となるということである．V と W が局所座標に関する偏微分のときは括弧積の項は消えるので，捩れがないという条件は

$$\nabla_{v_k}(v_j) = \nabla_{v_j}(v_k)$$

になる．クリストッフェル記号を用いて表わせば，

$$\Gamma^i_{k,j} = \Gamma^i_{j,k}$$

が任意の i, j, k に対し成り立つということになる．すなわち $\Gamma^i_{k,j}$ は k と j に関し対称である．

補題 3.2.2　リーマン多様体の接束には捩れをもたない $SO(n)$-接続が一意的に存在する．この接続をレビ・チビタ接続という．

証明　まず最初に一意性を証明しよう．$\Gamma^j_{k,i}$ と $\widehat{\Gamma}^j_{k,i}$ を 2 つの捩れのない $SO(n)$-接続のクリストッフェル記号とする．各 k に対し差の行列 $\mu_k = \Gamma_k - \widehat{\Gamma}_k$ をとろう．2 つの接続は $SO(n)$-接続であることから，任意の k に対し

$$(g \cdot \mu_k)^{tr} + g \cdot \mu_k = 0$$

が成り立つ．どちらの接続も捩れがないことから

$$(\mu_k)_i^j = (\mu_i)_k^j$$

を得る．ここで，$\nu_k = g \cdot \mu_k$ とおこう．最初の式から，任意の k に対し

$$(\nu_k)^{tr} + \nu_k = 0$$

を得る．2 番目の式から

$$(\nu_k)_{j,i} = (\nu_i)_{j,k}$$

を得る．よって

$$(\nu_k)_{j,i} = -(\nu_k)_{i,j} = -(\nu_j)_{i,k} = (\nu_j)_{k,i} = (\nu_i)_{k,j} = -(\nu_i)_{j,k} = -(\nu_k)_{j,i}.$$

したがって，すべての i, j, k に対し $(\nu_k)_{j,i} = 0$ を得る．g は可逆なので，任意の k に対し $\mu_k = 0$，すなわち $\Gamma_k = \widehat{\Gamma}_k$ を得る．よって一意性は証明された．

存在については，任意の k に対し

$$(\Upsilon_k)_{i,j} = \frac{1}{2}(\partial_k g_{i,j} + \partial_j g_{i,k} - \partial_i g_{k,j}),$$

$$\Gamma_k = g^{-1} \cdot \Upsilon_k$$

と定義すると，このクリストッフェル記号が捩れのない $SO(n)$-接続を与えることが直接計算することにより確かめられる．レビ・チビタ接続の存在は各点 $x \in X$ で局所座標を計量が 1 次のオーダーまで標準計量になるようにとることによっても証明できる (このような座標は**正規座標**とよばれる)．このような座標に対しクリストッフェル記号は点 x で 0 になる．□

定義 3.2.3 レビ・チビタ接続はリーマン多様体に対する**リーマン接続**ともよばれる．

スピノル束の接続. $P \to X$ をかってな $SO(n)$-束とし，$\widetilde{P} \to X$ をそのスピン束への持ち上げとする．このとき P 上の任意の $SO(n)$-接続は自動的に $\widetilde{P}$ 上の $Spin(n)$-接続に持ち上がる．接続とは P の水平分布のことであると考えればこのことは明白である．$\widetilde{P}$ は P の 2 重被覆なので，単に，被覆写像の各

点での微分の逆写像で水平分布を持ち上げればよい．これは P の与えられた $SO(n)$-接続に落ちるただ一つの $Spin(n)$-接続である．

$P \to X$ が接束の直交枠束で接続がリーマン接続のとき，$\widetilde{P}$ の誘導接続を**スピン接続**という．

さて，かってな $SO(n)$-束 $P \to X$ で接続が与えられたものと，そのスピン持ち上げ $\widetilde{P}$ の場合に話を戻そう．P の接続は $Cl(P)$ の接続を誘導する．そして $\widetilde{P}$ へ持ち上げられた接続は $S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ の接続を誘導する．これらの接続の共変微分をそれぞれ ∇ と $\widetilde{\nabla}$ で表わす．$Spin(n)$ はスピン表現 $\Delta_{\mathbf{C}}$ のもとにユニタリ変換として作用するので，接続 $\widetilde{\nabla}$ は $S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ のユニタリ接続である．$Cl(P)$ の接続は次の意味で代数構造に関する微分になる：すなわち，任意の $Cl(P)$ の切断 λ_1, λ_2 に対し

$$\nabla(\lambda_1\lambda_2) = \nabla(\lambda_1)\lambda_2 + \lambda_1\nabla(\lambda_2)$$

が成り立つ．また，$Cl(P)$ の $S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ への作用は次の意味でこれらの接続と両立する：すなわち，任意の $Cl(P)$ の切断 λ と $S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ の切断 σ に対し

$$\widetilde{\nabla}(\lambda \cdot \sigma) = \nabla(\lambda) \cdot \sigma + \lambda \cdot \widetilde{\nabla}(\sigma)$$

が成り立つ．

容易にわかるように，分解 $Cl(P) = Cl_0(P) \oplus Cl_1(P)$ は ∇ で不変で，よってこれら 2 つの部分束は誘導接続と共変微分をもつ．また複素単元 $\omega_{\mathbf{C}}$ は $\nabla(\omega_{\mathbf{C}}) = 0$ という意味で接続に関し平行である．このことは $(Cl(P) \otimes \mathbf{C})^{\pm}$ は共変微分で不変であることを意味する．$SO(2n)$-束 P の場合，$S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ の $S_{\mathbf{C}}^{\pm}(\widetilde{P})$ への分解もまた接続で不変であり，この 2 つの部分束はユニタリ接続をもつ．これも同じ記号 $\widetilde{\nabla}$ で表わす．

$Spin(n)$ のリー環とその $Cl(\mathbf{R}^n)$ への作用． 2 重被覆写像 $Spin(n) \to SO(n)$ により $Spin(n)$ のリー環は $SO(n)$ のリー環 $so(n)$ と同一視される．すなわち $Spin(n)$ のリー環は $n \times n$ 実反対称行列全体のなす空間である．このリー環の基底は $1 \leq i < j \leq n$ に対し $e_i \wedge e_j$ で表わされるものの全体である．ここに $e_i \wedge e_j$ は，ij 平面において e_i から e_j 方向へ角度 θ で回転する助変数 θ の 1 助変数部分群に単位元において接する行列である．具体的には，(i, j)-成分が -1

で，(j,i)-成分が 1 で，その他の成分はすべて 0 であるような行列である．

補題 3.2.4 $SO(n)$ と $Spin(n)$ の自然な同一視において 1 助変数部分群

$$\theta \mapsto \cos(\theta)1 + \sin(\theta)e_i e_j \in Spin(n)$$

の無限小生成元は $2(e_i \wedge e_j)$ である．

証明 まず最初に与えられている元は積 $e_i(-\cos(\theta)e_i + \sin(\theta)e_j)$ と表わされるので，この群は $Spin(n)$ の部分群となることに注意しよう．$Spin(n)$ の $\mathbf{R}^n \subset Cl(\mathbf{R}^n)$ への共役作用により誘導される自然な写像 $Spin(n) \to SO(n)$ がリー環の同一視を誘導する．よって，与えられた 1 助変数部分群の無限小生成元を計算するには，$\mathbf{R}^n$ の回転群の誘導された 1 助変数部分群の無限小生成元を計算すればよい．単位ベクトル v の $\mathbf{R}^n$ への共役作用は v に垂直な超平面に関する反転 R_v の -1 倍であることから，与えられた元の $\mathbf{R}^n$ への共役作用は

$$v = -\cos(\theta)e_i + \sin(\theta)e_j$$

とおいて

$$R_{e_i} \circ R_v$$

と表わせる．この合成は単に ij 平面における e_i から e_j への角度 2θ にほかならない．よってその無限小生成元は $2(e_i \wedge e_j)$ である． □

もちろん前補題で与えられた 1 助変数部分群を $Cl(\mathbf{R}^n)$ の部分群とみたとき，単位元における接ベクトルは e_ie_j である．よって 2 重被覆写像 $Spin(n) \to SO(n)$ の単位元における微分により，元 $e_ie_j \in Cl(\mathbf{R}^n)$ は $2(e_i \wedge e_j) \in so(n)$ にうつされることが証明された．

$S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ 上の接続に対する具体的公式． $P \to X$ を接続 ω をもつ $SO(n)$-束とし，$\widetilde{P} \to X$ を P のスピン束への持ち上げとする．

$$\widetilde{\nabla}\colon\ \Omega^0(X; S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})) \to \Omega^1(X; S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P}))$$

を誘導共変微分とする．ここでの目的は，P の (したがって $S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ の) 局所自明化を一つ固定し，ω の接続行列 $\widetilde{\omega} = (\widetilde{\omega}_{i,j})$ に関する $\widetilde{\nabla}$ の局所的公式を導き出すことである．

開集合 $U \subset X$ と自明化 $P|_U = U \times SO(n)$ を固定する．これに関し接続 $\omega|_U$ が U 上の行列値 1 次微分形式 $\widetilde{\omega}_{i,j}$ で与えられるとする．もちろん ω は $SO(n)$-接続なので，行列 $(\widetilde{\omega}_{i,j})$ は反対称である．$SO(n)$ と $Spin(n)$ のリー環を 2 重被覆写像を通して同一視したので，$\widetilde{P}|_U$ の誘導された自明化に対する誘導接続は同じ 1 次微分形式の行列 $(\widetilde{\omega}_{i,j})$ で与えられる．

$\sigma(u)$ を $S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P}|_U)$ の切断とする．与えられた自明化を用いて $\sigma(u) = (u, s(u))$ と書こう．このとき

$$\widetilde{\nabla}(\sigma)(u) = (u, d\rho(\widetilde{\omega}_{i,j})(s(u)) + ds_u)$$

を得る．ここに $d\rho$ は，$Spin(n)$ の $S_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^n)$ への作用から誘導される $so(n)$ の $S_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^n)$ への作用である．もちろん $e_i \wedge e_j$ は (i,j)-成分が -1 で (j,i)-成分が 1 である反対称行列なので，行列 $(\widetilde{\omega}_{i,j})$ は $so(n)$ の元として

$$\sum_{i<j} \widetilde{\omega}_{j,i} e_i \wedge e_j$$

と表わされる．補題 3.2.4 より元 $e_i \wedge e_j$ は $(e_i e_j)/2 \in Cl(\mathbf{R}^n)$ に対応する．よって

$$d\rho(\widetilde{\omega}_{i,j}) = \frac{1}{2} \sum_{i<j} \widetilde{\omega}_{j,i} e_i e_j$$

となる．ただし右辺の $S_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^n)$ への作用はクリフォード積で与えられる．よって，与えられた自明化に関して書かれた最終的公式は

$$\widetilde{\nabla}(\sigma)(u) = \left(u, ds_u + \frac{1}{2} \sum_{i<j} \widetilde{\omega}_{j,i} e_i e_j \cdot s(u) \right)$$

となる．ここに σ は切断 $\sigma(u) = (u, s(u))$ である．

***$Spin^c(n)$*-束の接続．** さて $P \to X$ を接続をもつ $SO(n)$-束とし，$\widetilde{P} \to X$ を $Spin^c$-束への持ち上げとする．この場合，$Spin^c(n) \to SO(n)$ は有限次被覆ではないので，P の接続 ω を自動的に $\widetilde{P}$ の接続に持ち上げることはできない．そこでもう一つの情報が必要である；すなわち $\widetilde{P}$ の行列式直線束 $\mathcal{L} \to X$ の $U(1)$-接続 A が必要である．ω と A が与えられると，主 $SO(n) \times S^1$-束の接続が定まる．この主束は $\widetilde{P}$ の $\{\pm 1\} \subset Spin^c(n)$ による商であるから，前と同

様にして，この接続は $\widetilde{P}$ の接続に一意的に持ち上がる．P および行列式直線束 $\mathcal{L}$ の局所自明化を固定し，この局所自明化に関し接続は各々 $(\widetilde{\omega}_{i,j})$ および $A = ia$ で与えられるとしよう．もちろん $S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ にも局所自明化が誘導される．この局所自明化に関し，共変微分は

$$\widetilde{\nabla}_e(\sigma)(u) = \left(u, ds_u(e) + \frac{1}{2}\left(ia(e) + \sum_{i<j} \widetilde{\omega}_{j,i}(e) e_i e_j\right) \cdot s(u)\right) \tag{3.2}$$

で与えられる．ここに σ は，$\widetilde{P}$ の誘導された局所自明化に関し $u \mapsto (u, s(u))$ で与えられる切断である．

3.3 ディラック作用素

本節で，リーマン多様体上のスピン束と $Spin^c$-束に対し，ディラック作用素を導入する．また，この作用素のいくつかの基本的性質を証明する．

X をリーマン多様体，$P \to X$ を接束の同伴 $SO(n)$-主束，そして $\widetilde{P}$ を P のスピンまたは $Spin^c$-束への持ち上げとする．また $S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ を同伴スピノル束とする．$Spin^c$-持ち上げの場合は，行列式直線束に $U(1)$-接続 A を 1 つ固定する．このとき**ディラック作用素**

$$\partial\!\!\!/_A : C^\infty(S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})) \to C^\infty(S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P}))$$

を次のように定義する：

$$\partial\!\!\!/_A(\sigma)(x) = \sum_{i=1}^n e_i \cdot \widetilde{\nabla}_{e_i}(\sigma)(x),$$

ただし $\{e_1, \cdots, e_n\}$ は TX_x の向き付けられた正規直交基底であり，$\cdot$ はクリフォード積を表わす．なおスピン束の場合，接続 A はないのでディラック作用素は $\partial\!\!\!/$ と表わされる．

補題 3.3.1 上で定義された作用素 $\partial\!\!\!/_A$ および $\partial\!\!\!/$ は正規直交枠 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ の選び方に依存しない．

証明 $\{e'_1, \cdots, e'_n\}$ をもう一つの正の向きの正規直交枠とする．

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} B_{i,j} e_i$$

とおくと B は $SO(n)$ の元である．

$$\sum_{j=1}^{n} e'_j \cdot \widetilde{\nabla}_{e'_j}(\sigma)$$

を考えよう．クリフォード積は双線形なので，任意の $\alpha \in S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ に対し

$$e'_j \cdot \alpha = \sum_{i=1}^{n} B_{i,j} e_i \cdot \alpha$$

となる．また $\widetilde{\nabla}_e$ は e に関し線形なので

$$\widetilde{\nabla}_{e'_j}(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} B_{i,j} \widetilde{\nabla}_{e_i}(\sigma)$$

となる．この 2 つを組み合わせて

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} e'_j \cdot \widetilde{\nabla}_{e'_j}(\sigma) &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} B_{i,j} e_i \cdot \left(\sum_{j'=1}^{n} B_{j',j} \widetilde{\nabla}_{e_{j'}}(\sigma) \right) \right) \\ &= \sum_{i,j,j'} B_{i,j} B_{j',j} e_i \cdot \widetilde{\nabla}_{e_{j'}}(\sigma)\end{aligned}$$

を得る．B は直交行列なので

$$\sum_{j} B_{i,j} B_{j',j} = \delta_{i,j'}$$

である．よって

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} e'_j \cdot \widetilde{\nabla}_{e'_j}(\sigma) &= \sum_{i,j'} \delta_{i,j'} e_i \cdot \widetilde{\nabla}_{e_{j'}}(\sigma) \\ &= \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \widetilde{\nabla}_{e_i}(\sigma)\end{aligned}$$

となる．よって証明は完了した．　□

リーマン多様体 X の接束の同伴主 $SO(n)$-束 $P \to X$ がスピン構造 $\widetilde{P}$ をもち，局所自明化が与えられているとき，ディラク作用素をこの自明化に関し書

き下そう．$\widetilde{\omega}_{i,j}$ をこの局所自明化に関する接続形式とする．σ を $S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ の局所切断で，誘導された局所自明化に関し $\sigma(u) = (u, s(u))$ で与えられるものとしよう．さらに，$e_1, \cdots, e_n$ を $u \in X$ における正規直交基底で，自明化に関し $\mathbf{R}^n$ の標準的基底に対応するものとする．このとき，

$$\begin{aligned}
\partial\!\!\!/(\sigma)(u) &= \sum_i e_i \cdot \widetilde{\nabla}_{e_i}(\sigma)(u) \\
&= \left(u, \sum_i e_i \cdot \left(ds_u(e_i) + \frac{1}{2}\sum_{j<k} \widetilde{\omega}_{k,j}(e_i)(e_j e_k) \cdot s(u)\right)\right) \\
&= \left(u, \sum_i e_i \cdot ds_u(e_i) + \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j<k} \widetilde{\omega}_{k,j}(e_i)(e_i e_j e_k) \cdot s(u)\right),
\end{aligned}$$

ただし，・はクリフォード積，と書ける．最後の表示からただちにわかるように，点 p において作用素 $\partial\!\!\!/$ は $\sum\limits_i e_i \cdot \frac{\partial}{\partial e_i}$ プラス 0 次項 (微分を含まない項) の形に表わせる．特に $\partial\!\!\!/$ は 1 階線形微分作用素である．

$Spin^c$-持ち上げ $\widetilde{P}$ と $\det(\widetilde{P})$ の $U(1)$-接続 A の場合，公式は

$$\partial\!\!\!/_A(\sigma)(u) = \sum_l e_l \cdot ds_u(e_l) + \frac{1}{2}\sum_l \left(A(e_l)e_l + \sum_{j<k} \widetilde{\omega}_{k,j}(e_l)(e_j e_k)\right) \cdot s(u) \tag{3.3}$$

となる．式 (3.1) から $\sum\limits_l A(e_l)e_l \cdot s(u)$ はクリフォード積 $A \cdot s(u)$ に等しいことに注意しよう．

次の補題は，接続 A が変化するとき，ディラク作用素がどのように変化するかを表わす単純な式を与える．

補題 3.3.2 A と $A' = A + \alpha$ を X 上の $Spin^c$-構造 $\widetilde{P}$ の行列式直線束 $\mathcal{L}$ の 2 つの $U(1)$-接続とする．このとき $S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ の任意の切断 ψ に対し，

$$\partial\!\!\!/_{A'}(\psi) = \partial\!\!\!/_A(\psi) + \frac{1}{2}\alpha \cdot \psi$$

が成り立つ．

証明 これは式 (3.3) およびその直後の注意から明らかである． □

偶数次元多様体の場合，$\partial\!\!\!/$ および $\partial\!\!\!/_A$ はどちらも $C^\infty(S^{\pm}_{\mathbf{C}}(\widetilde{P}))$ を $C^\infty(S^{\mp}_{\mathbf{C}}(\widetilde{P}))$ にうつすことに注意しよう．

次の補題で，$\partial\!\!\!/$ の満たす特別な性質，すなわち形式的自己随伴であるということを証明する．

補題 3.3.3 X をスピンまたは $Spin^c$-構造 $\widetilde{P}$ をもつ閉多様体とする．このとき $\partial\!\!\!/ : C^\infty(S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})) \to C^\infty(S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P}))$ は次の意味で形式的自己随伴である：

$$(\partial\!\!\!/(\sigma_1), \sigma_2)_{L^2} = (\sigma_1, \partial\!\!\!/(\sigma_2))_{L^2}.$$

ここに $(\cdot,\cdot)_{L^2}$ は各点でのファイバーのエルミート内積から誘導される $S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ の L^2-内積を表わす．

証明 $C^\infty(S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P}))$ のエルミート内積は

$$(\partial\!\!\!/(\sigma_1), \sigma_2)_{L^2} = \int_X \langle \partial\!\!\!/(\sigma_1), \sigma_2 \rangle dvol$$

で与えられる．ただし右辺の内積は，複素スピノル束のファイバーの各点ごとのエルミート内積である．1 点 x のまわりの局所座標で，標準的単位接ベクトル $e_1, \cdots, e_n$ が x で $\nabla_{e_i}(e_j) = 0$ を満たすものを固定しよう．x で計算すると

$$\begin{aligned}
\langle \partial\!\!\!/(\sigma_1), \sigma_2 \rangle_x &= \left\langle \sum_i e_i \widetilde{\nabla}_{e_i}(\sigma_1), \sigma_2 \right\rangle_x \\
&= -\sum_i \langle \widetilde{\nabla}_{e_i}(\sigma_1), e_i\sigma_2 \rangle_x \\
&= \sum_i \langle \sigma_1, \widetilde{\nabla}_{e_i}(e_i\sigma_2) \rangle_x - \frac{\partial}{\partial e_i}\langle \sigma_1, e_i\sigma_2 \rangle_x \\
&= \sum_i \langle \sigma_1, e_i\widetilde{\nabla}_{e_i}(\sigma_2) \rangle_x + \langle \sigma_1, \nabla_{e_i}(e_i)\sigma_2 \rangle_x - \frac{\partial}{\partial e_i}\langle \sigma_1, e_i\sigma_2 \rangle_x \\
&= \sum_i \langle \sigma_1, e_i\widetilde{\nabla}_{e_i}(\sigma_2) \rangle_x - \frac{\partial}{\partial e_i}\langle \sigma_1, e_i\sigma_2 \rangle_x \\
&= \langle \sigma_1, \partial\!\!\!/(\sigma_2) \rangle_x - \sum_i \frac{\partial}{\partial e_i}\langle \sigma_1, e_i\sigma_2 \rangle_x
\end{aligned}$$

を得る．さて，X 上の複素ベクトル場 V，すなわち $TX \otimes \mathbf{C}$ の切断，を任意のベクトル場 W と任意の $x \in X$ に対し

$$\langle V(x), W(x)\rangle = \langle \sigma_1(x), W\cdot\sigma_2(x)\rangle$$

が成り立つものとして定義する．すると上の式は

$$\langle \partial\!\!\!/(\sigma_1), \sigma_2\rangle_x = \langle \sigma_1, \partial\!\!\!/(\sigma_2)\rangle_x - \mathrm{div}(V)_x$$

と表わされる．この表示に現われる量はすべて大域的なものなので，この表示は X のすべての点 x で成立している．よって X 上で積分して

$$\langle \partial\!\!\!/(\sigma_1), \sigma_2\rangle_{L^2} = \langle \sigma_1, \partial\!\!\!/(\sigma_2)\rangle_{L^2} - \int_X \mathrm{div}(V)dvol$$

を得る．結果はこれよりただちに従う． □

$\partial\!\!\!/$ と $\partial\!\!\!/_A$ の表象． D を束 $E\to X$ の切断全体から $F\to X$ の切断全体への微分作用素とする．D の**表象** $\mathrm{Symb}(D)$ とは，X の余接束 T^*X に引き戻した束 π^*E から π^*F への束写像で，以下のように定義されるものである．

微分作用素の表象は，最高階の項に関する関数から決まる束写像である．例えばここで扱うディラク作用素の場合，表象は1階の項のみに関する関数である．x で直交する局所座標 $(x^1,\cdots,x^n)$ を固定しよう．d 階微分作用素は局所座標を用いて

$$D(\sigma) = \sum_I \alpha_I \frac{\partial^I}{\partial x^I} + \text{低次項}$$

と書けるとする．ここに第1項の和は多重指数 $I=(i_1,\cdots,i_n)$ で $i_1+\cdots+i_n=d$ なるもの全体にわたる和で，$\partial x^I = (\partial x^1)^{i_1}\cdots(\partial x^n)^{i_n}$，$\alpha_I$ は E から F への束写像である．余接ベクトル $\xi\in T^*X_x$ に対する D の表象は，線形写像

$$\mathrm{Symb}(D)(\xi) = i^n\sum_I \alpha_I\xi^I$$

で与えられる．ただし $\xi = \xi_1dx^1+\cdots+\xi_ndx^n$, $\xi^I = \xi_1^{i_1}\cdots\xi_n^{i_n}$ である．よって T^*X_x 上の $\partial\!\!\!/$ の表象は

$$\mathrm{Symb}(\partial\!\!\!/)(\xi) = i\sum_j \xi_je_j\cdot(\;)$$

で与えられる．ここに $\cdot$ はクリフォード積である．T^*X と TX の同一視を用

いると，T^*X_x が $S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ にクリフォード積で作用しているとみることができる．するとディラク作用素の表象は単に $i\xi$ によるクリフォード積である．

任意の 0 でない余接ベクトル ξ に対し，$i\xi$ によるクリフォード積は $S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ のファイバーから自分自身への同型を誘導する．このようなとき 1 階の線形微分作用素は**楕円型**であるといわれる．

同様にして，$\partial\!\!\!/_A$ の表象は余接ベクトル ξ において $i\xi$ によるクリフォード積になる．

$\partial\!\!\!/$ と $\partial\!\!\!/_A$ は楕円型なので，底多様体がコンパクトのとき多くのことがいえる．これらは $S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ の L^2_k-切断全体から L^2_{k-1}-切断全体への作用素とみなすことができ，フレドホルム型である．その核は有限次元であり，k のとり方によらない．実際，$\partial\!\!\!/$ および $\partial\!\!\!/_A$ の核に属する任意の L^2-切断は，実際には C^∞-切断である．これらの作用素の像は L^2_{k-1}-切断の空間の有限余次元の閉部分空間になる．再び，L^2-内積に関しこれらの像と直交する任意の元は，実際には C^∞-切断となる．

例． コンパクト連結向き付けられた 1 次元多様体からはじめよう．計量は自動的に平坦で，したがってある半径 R の円周と等長的になる．向き付けから接束の同伴 $SO(1)$-束 P_X の自明化が決まる．$\widetilde{P} \to X$ を X に対するスピン構造とすると，P_X の自明化は $\widetilde{P}$ の局所自明化を決める； $\widetilde{P}$ のホロノミーは選んだスピン構造に依存し ± 1 のいずれかである．複素スピノル束 $S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ は $\widetilde{P} \times_{\pm 1} \mathbf{C}$ に同型である．この束には，± 1 のいずれかをホロノミーにもつ局所自明化が $\widetilde{P}$ の局所自明化から誘導される．正の向きの単位接ベクトルによるクリフォード積は i 倍に等しく，$S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ 上の共変微分は，局所自明化に関し通常の微分である．よってディラク作用素

$$\partial\!\!\!/ :\ C^\infty(S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})) \to C^\infty(S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P}))$$

は $i\frac{d}{d\theta}$ で，$\widetilde{P}$ のホロノミーが 1 のときは S^1 上の複素数値関数の空間に作用し，$\widetilde{P}$ のホロノミーは -1 のときは $f(x+2\pi R) = -f(x)$ を満たす $\mathbf{R}^1$ 上の複素数値関数の空間に作用する．第 1 の場合，核も余核も 1 次元で，定数関数全体からなる．第 2 の場合，$\partial\!\!\!/$ は同型である．

次に，向き付けられた 2 次元閉リーマン多様体を考えよう．$P_X \to X$ を接束の同伴 $SO(2)$-束とする．これは S^1-束，または同値なことには $U(1)$-束である．$\mathbf{R}^2$ のクリフォード代数は $\mathbf{H}$ と同一視され，e_1e_2 は i に，e_1 は j に，e_2 は k に対応する．群 $Spin(2)$ は $\mathbf{C} \subset \mathbf{H}$ の単位円，すなわち $\cos(\theta)+\sin(\theta)e_1e_2$ の形のすべての元である．P_X のスピン構造 $\widetilde{P}$ は単に P_X の 2 乗根である $U(1)$-束である．$\mathbf{H} = \mathbf{C} \oplus j\mathbf{C}$ と書き，$Cl(\mathbf{R}^2) = \mathbf{H}$ が左からクリフォード積で作用するとみなす．このとき $Spin(2)$ の $\mathbf{C} \oplus j\mathbf{C}$ への作用は，任意の $\zeta \in S^1 \cong Spin(2)$ に対し

$$\zeta \mapsto \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \bar{\zeta} \end{pmatrix}$$

で与えられる．一方，元 e_1e_2, e_1, e_2 の積は各々 i, j, k 倍で与えられるので，分解 $\mathbf{C} \oplus j\mathbf{C}$ に関し，これらは行列

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられる．よって $S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ は 2 つの複素直線束の直和で，一方は S^1 の $U(1)$ への標準的表現により $\widetilde{P}$ に同伴される直線束で，もう一方はその逆直線束である．$\omega_{\mathbf{C}} = ie_1e_2$ なので，$S^+_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ は e_1e_2 の $-i$ 固有空間，すなわち標準的表現の逆 (反傾表現)，に対応する複素直線束である．この束は $\sqrt{K_X}$ ，すなわち概複素構造の標準束 K_X の 2 乗根である．この逆直線束，すなわち P_X の 2 乗根に同伴する束，が $S^-_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ である．この束は $\sqrt{K_X^{-1}} = K_X^{-1} \otimes \sqrt{K_X}$ である．P_X のレビ・チビタ接続は $\widetilde{P}$ の接続を誘導し，したがって $S^{\pm}_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ の共変微分を誘導する．1 点で正規直交基底 $\{e_1, e_2\}$ を選び，$S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P}) = S^-_{\mathbf{C}}(\widetilde{P}) \oplus S^+_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ と分解すると，ディラク作用素は

$$\begin{pmatrix} 0 & -\nabla_{e_1} - i\nabla_{e_2} \\ \nabla_{e_1} - i\nabla_{e_2} & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられる．特に，もし計量が与えられた座標系に関し 1 点で 1 次のオーダーまで標準的計量であるならば，その点において

$$\partial\!\!\!/ = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{\partial}{\partial e_1} - i\dfrac{\partial}{\partial e_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial e_1} - i\dfrac{\partial}{\partial e_2} & 0 \end{pmatrix}$$

となる．この 2×2 行列を書くとき我々がとっている分解は

$$S^-_{\mathbf{C}}(\widetilde{P}) \oplus S^+_{\mathbf{C}}(\widetilde{P}) \cong K_X^{-\frac{1}{2}} \oplus K_X^{\frac{1}{2}}$$

であることに注意しよう．

計量と向きにより X の複素構造が決まる．この複素構造に対する局所座標 $z = e_1 + ie_2$ で，その実座標 (e_1, e_2) に関し計量が 1 次のオーダーまで標準的計量に等しいものが存在する．このような局所正則座標に関し $2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial e_1} + i\frac{\partial}{\partial e_2}$ であり，よってディラク作用素は

$$\partial\!\!\!/ = \begin{pmatrix} 0 & -2\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} \\ 2\dfrac{\partial}{\partial z} & 0 \end{pmatrix}$$

と書き換えられる．ここに $-\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ は $K_X^{\frac{1}{2}}$ の切断を $K_X^{-\frac{1}{2}} = K_X^{\frac{1}{2}} \otimes K_X^{-1}$ の切断にうつす作用素であり，$\frac{\partial}{\partial z}$ はその随伴作用素である．

さて今度は $\mathbf{R}^3$ の場合を考察しよう．クリフォード代数は $\mathbf{H}\oplus\mathbf{H}$ に同型で，2 つの成分は $\omega_{\mathbf{C}} = -e_1e_2e_3$ の作用に対するプラスとマイナスの固有空間である．スピン表現として $Cl(\mathbf{R}^3)$ がプラス成分への射影を通して作用するものをとる．よって

$$S_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^3) = \mathbf{C} \oplus j\mathbf{C} = \mathbf{H}$$

である．プラス成分の基底は $1, i, j, k$ に応じて

$$\left\{ \frac{1+\omega_{\mathbf{C}}}{2},\quad \frac{e_3 + e_1e_2}{2},\quad \frac{e_1 + e_2e_3}{2},\quad \frac{e_2 + e_3e_1}{2} \right\}$$

で与えられる．これらの $S_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^3) = \mathbf{C} \oplus j\mathbf{C}$ への作用の表現行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられる．$\mathbf{R}^2$ が e_1, e_2 で張られるとし，同型 $Cl(\mathbf{R}^2) \to Cl^+(\mathbf{R}^3)$ を考えると，この同型は上の $\mathbf{H}$ の同型と可換である．このことより表現空間 $S_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^3)$

の $\mathbf{R}^2$ への制限は，分解 $S_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^2) = S^-_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^2) \oplus S^+_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^2)$ を与える．したがってこの分解に関し，$\mathbf{R}^3$ 上のディラク作用素は

$$\begin{pmatrix} i\nabla_{e_3} & -\nabla_{e_1} - i\nabla_{e_2} \\ \nabla_{e_1} - i\nabla_{e_2} & -i\nabla_{e_3} \end{pmatrix}$$

で与えられる．または $\mathbf{R}^2$ の複素構造を使って書き直すと

$$\begin{pmatrix} i\nabla_{e_3} & -2\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} \\ 2\dfrac{\partial}{\partial z} & -i\nabla_{e_3} \end{pmatrix}$$

となる．ただしこの行列表示は分解

$$S^-_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^2) \oplus S^+_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^2)$$

に関するものである．

ディラク作用素に対する指数定理． X を向き付けられた 4 次元閉リーマン多様体とし，$\widetilde{P}$ を X のスピン構造とする．$\partial\!\!\!/ \colon C^\infty(S^+_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})) \to C^\infty(S^-_{\mathbf{C}}(\widetilde{P}))$ は楕円型作用素なので，核は有限次元で，像は余次元が有限な閉部分空間である．$\partial\!\!\!/$ の**指数**とは核の複素次元マイナス余核の複素次元と定義される．この指数は表象から次のようにして計算される．$S^\pm_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ の余接束 T^*X への引き戻し $\pi^* S^\pm_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ を考えよう．表象は T^*X の 0-切断の補集合上でこの 2 つの束の束同型を誘導する．このようにして表象は，$(T^*X, (T^*X - X))$ の相対 K-理論の元を定める．アティヤ・シンガー指数定理はこの相対 K-理論の元から作用素の指数を計算するものである．ディラク作用素の場合，指数は $\widehat{A}(X)$，いわゆる X の A-ハット種数，である．向き付けられた閉 4 次元多様体の場合，$\sigma(X)$ を X の符号数 (signature) とするとき，

$$\widehat{A}(X) = \int_X -\frac{p_1(X)}{24} = -\frac{\sigma(X)}{8}$$

で与えられる．4 次元多様体の $Spin^c$-構造 $\widetilde{P}$ の場合は問題とする束が変わり，指数公式によると

$$\frac{c_1(\det(\widetilde{P}))^2-\sigma(X)}{8}$$

が $Spin^c$-ディラク作用素の指数である．

この理論の帰結として 2 点わかることがある：スピン多様体の $\widehat{A}$-種数は整数である．また，4 次元スピン多様体の符号数は 8 で割りきれる (実際には 16 で割りきれる)．

3.4 複素多様体の場合

概複素多様体に対する $Spin^c$**-構造．** V を有限次元実内積空間で，複素構造 $J:V\to V$, $J^2=-1$ が与えられたものとする．J は直交変換であるという意味で，この複素構造は内積と両立すると仮定する．$V\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ を J の作用の複素化の i および $-i$ 固有空間へ分解しよう．この 2 つの固有空間への分解を $V_{\mathbf{C}}^{1,0}\oplus V_{\mathbf{C}}^{0,1}$ で表わし，また両者への射影を各々$\pi^{1,0}$ と $\pi^{0,1}$ で表わす．$\pi^{1,0}$ は複素線形であることに注意しよう．この分解は複素外積代数 $\Lambda_{\mathbf{C}}^*(V\otimes\mathbf{C})$ に 2 重次数付けを誘導する．また，$V_{\mathbf{C}}^{1,0}$ の元の外積からなる部分代数を $\Lambda_{\mathbf{C}}^*$ で表わす．

V の $\Lambda_{\mathbf{C}}^*$ への作用を

$$v\cdot(\alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^t)=\sqrt{2}(\pi^{1,0}(v)\wedge\alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^t-\pi^{1,0}(v)\angle(\alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^t))$$

により定義する．ただし

$$\pi^{1,0}(v)\angle(\alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^t)=\sum_{i=1}^{t}(-1)^{i-1}\langle\alpha^i,\pi^{1,0}(v)\rangle\alpha^1\wedge\cdots\wedge\widehat{\alpha^i}\wedge\cdots\wedge\alpha^t$$

であり，内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は V の与えられた内積を $V\otimes\mathbf{C}$ のエルミート内積に拡張したものである (最初の成分に関し複素線形とする)．明らかにこの作用は $\Lambda_{\mathbf{C}}^*$ の複素線形自己準同型である．しかし V に関しては複素線形ではない．

補題 3.4.1

$$v\cdot(v\cdot(\alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^t))=-|v|^2\alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^t.$$

証明 明らかに，$\pi^{1,0}(v)$ を外積する作用も $\pi^{1,0}(v)$ を縮約する作用も 2 乗す

ると 0 になる作用素である．よって，$v\cdot(v\cdot(\alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^t))$ は

$$2(-\pi^{1,0}(v)\angle(\pi^{1,0}(v)\wedge\alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^t)-\pi^{1,0}(v)\wedge(\pi^{1,0}(v)\angle(\alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^t)))$$

に等しく，またこれは

$$-2\langle\pi^{1,0}(v),\pi^{1,0}(v)\rangle\alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^t$$

に等しい．$v\in V$ なので明らかに

$$\langle\pi^{1,0}(v),\pi^{1,0}(v)\rangle=|\pi^{1,0}(v)|^2=\frac{|v|^2}{2}$$

である．これにより証明は完了する． □

系 3.4.2 V の $\Lambda^*_{\mathbf{C}}V$ への作用は $Cl(V)\otimes\mathbf{C}$ の $\Lambda^*_{\mathbf{C}}V$ の複素線形自己準同型としての作用に拡張する．

証明 すでにみたように，与えられた作用はクリフォード代数を定義する関係を満たす．作用は複素線形なのでこれは複素クリフォード代数の作用を定める． □

補題 3.4.3 前系で与えられた表現はスピン表現に同型である．

証明 これを証明するにはこの表現が既約であることをみさえすればよい．$\Lambda^*_{\mathbf{C}}V$ の次元は $Cl(V)\otimes\mathbf{C}$ の既約表現の次元に等しく，またこの表現は非自明なので，結果はただちに従う． □

次に，ユニタリ群 $U(V)$ の $Spin^c(V)$ への埋め込み ρ を構成しよう．任意の $A\in U(V)$ に対し，複素ベクトル空間としての V のユニタリ枠 $e_1,\cdots,e_n$ で，これに関し A が対角行列で表現されるものが存在する：$1\le k\le n$ に対し $A(e_k)=e^{i\theta_k}e_k$ とする．A に対し V の複素化クリフォード代数の元

$$e^{\frac{i\theta}{2}}\prod_{k=1}^{n}\left(\cos\left(\frac{\theta_k}{2}\right)+\sin\left(\frac{\theta_k}{2}\right)e_kJe_k\right),$$

ただし $\theta=\sum_{k=1}^{n}\theta_k$ を同伴させる．これらの元が $U(V)$ から $Spin(V)$ への連続写像で，$U(V)$ の単位元を $Spin(V)$ の単位元にうつすものを定めることは明ら

かである．直接計算することにより，この写像を $SO(V) \times S^1$ に射影すると，A を $(\iota(A), \det(A))$ に送ることが確かめられる．ただし ι は通常の包含写像 $U(V) \subset SO(V)$ である．したがって ρ は群準同型 $(\iota, \det) : U(V) \to SO(V) \times S^1$ の $U(V)$ から $Spin(V)$ への群準同型への一意的な持ち上げである．

補題 3.4.4 上で構成された埋め込み ρ のもとに，スピン加群 $\Lambda^*_{\mathbf{C}} V$ への $U(V)$ の作用は $\Lambda^*_{\mathbf{C}} V$ への通常の $U(V)$ の作用に等しい．

証明 これは直接計算することから従う． □

系 3.4.5 X を $2n$ 次元コンパクトリーマン多様体で，計量と両立する概複素構造 $J : TX \to TX$ をもつものとする．このとき，X に対する自然な $Spin^c$-構造 $\widetilde{P}$ で，行列式直線束は K_X^{-1}，すなわち $(n, 0)$-形式のなす標準直線束の逆直線束，に同型なものが存在する．この $Spin^c$-構造に対する複素スピノル束は複素接束 $\Lambda^* T_{\mathbf{C}} X$ の複素外積代数であり，これへのクリフォード代数の作用は系 3.4.2 で与えられたものである．この同一視のもとに $S^+_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ は $\Lambda^{(2*,0)} T_{\mathbf{C}} X$ であり，$S^-_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ は $\Lambda^{(2*+1,0)} T_{\mathbf{C}} X$ である．

証明 複素構造とリーマン構造は接束の枠束の構造群を $U(n)$ に簡約化する．すなわち主 $U(n)$-束 $Q_{U(n)} \to X$ で，$Q_{U(n)} \times_{U(n)} SO(2n)$ が X の直交枠束 $P_{SO(2n)}$ と同型になるものが存在する．そこで，上で構成した埋め込み $\rho : U(n) \to Spin^c(2n)$ を用いて

$$\widetilde{P}_X = Q_{U(n)} \times_{U(n)} Spin^c(2n)$$

を作る．明らかに，

$$\widetilde{P}_X / S^1 = Q_{U(n)} \times_{U(n)} SO(2n)$$

であり，$U(n) \to SO(2n)$ は ρ の商である．作り方からこの商は自然な埋め込み ι である．これにより $\widetilde{P}_X$ は X の $Spin^c$-構造であることが証明された．この $Spin^c$-構造の行列式束は $\widetilde{P}_X / Spin(2n) = Q_{U(n)} \times_{U(n)} S^1$ で，$U(n) \to S^1$ は行列式をとる写像である．すなわち $\widetilde{P}_X$ の行列式束は $Q_{U(n)}$ の行列式束に等しい．これは $Q^*_{U(n)}$，すなわち余接束のユニタリ枠束，の行列式束の逆直線

束である．余接束の行列式束はもちろん $(n,0)$-形式のなす束，すなわち標準直線束に C^∞-同型である．$S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P}_X)$ へのクリフォード積の作用に関して主張されていることは系 3.4.2 からただちに従う．最後に，$\omega_{\mathbf{C}}$ のクリフォード積による $+1$ および -1 固有空間をみつけよう．局所座標を $Je_{2k-1}=e_{2k}$ となるようにとり，さらに $\alpha_j=(e_{2j-1}-ie_{2j})/\sqrt{2}$ とおく．混乱を避けるため系 3.4.2 で得られたクリフォード代数の作用を μ で表わそう．すると $\omega_{\mathbf{C}}$ によるクリフォード積は

$$i^n\mu(\alpha_1)\mu(i\alpha_1)\cdots\mu(\alpha_n)\mu(i\alpha_n)$$

に等しい．なぜならば，$V_{\mathbf{C}}^{1,0}$ の下部実ベクトル空間の $\mathbf{R}$-正規直交基底として $\alpha_1,i\alpha_1,\cdots,\alpha_n,i\alpha_n$ がとれるからである．$\omega_{\mathbf{C}}\cdot(\alpha_{j_1}\wedge\cdots\wedge\alpha_{j_q})$ を計算しよう．もし $\ell\notin\{j_1,\cdots,j_q\}$ ならば，

$$\mu(\alpha_\ell)\mu(i\alpha_\ell)\cdot(\alpha_{j_1}\wedge\cdots\wedge\alpha_{j_q})=(-i)(\alpha_{j_1}\wedge\cdots\wedge\alpha_{j_q})$$

であり，一方，$\ell\in\{j_1,\cdots,j_q\}$ ならば

$$\mu(\alpha_\ell)\mu(i\alpha_\ell)\cdot(\alpha_{j_1}\wedge\cdots\wedge\alpha_{j_q})=i(\alpha_{j_1}\wedge\cdots\wedge\alpha_{j_q})$$

となる．よって，

$$\begin{aligned}\omega_{\mathbf{C}}(\alpha_{j_1}\wedge\cdots\wedge\alpha_{j_q})&=i^n(-i)^{n-q}i^q(\alpha_{j_1}\wedge\cdots\wedge\alpha_{j_q})\\&=(-1)^q(\alpha_{j_1}\wedge\cdots\wedge\alpha_{j_q})\end{aligned}$$

を得る．これにより正則接束の偶数次交代テンソル全体が $\omega_{\mathbf{C}}$ の $+1$ 固有空間で，奇数次交代テンソル全体が $\omega_{\mathbf{C}}$ の -1 固有空間であることが証明された．

□

前系で与えられた $Spin^c$-構造を，**概複素構造から決まる** $Spin^c$**-構造**とよぶ．またこれは概複素構造の $Spin^c$-構造であるともいう．

系 3.4.6 両立するリーマン計量をもつ概複素多様体の複素スピノル束は，複素数値 $(0,q)$-形式のなす外積代数束のすべての q にわたる直和をとったものと同一視される．さらに $S_{\mathbf{C}}^+(\widetilde{P}_X)$ は $(0,2*)$-形式のなす束と同一視され，$S_{\mathbf{C}}^-(\widetilde{P}_X)$ は $(0,2*+1)$-形式のなす束と同一視される．最後に，ベクトル場 v が $(0,q)$-

形式 ν にクリフォード積で作用する仕方は

$$v \cdot \nu = \sqrt{2}(\pi^{0,1}(v^*) \wedge \nu - \pi^{0,1}(v^*) \angle \nu)$$

で与えられる．ここに v^* は v の双対 1 次形式，$\pi^{0,1}$ は $\Lambda^{0,1}T^*X$ への射影，$\angle$ は縮約作用素を表わす．

証明 複素ベクトル空間の下部実ベクトル空間 V が両立する内積をもつとする．このとき $v \mapsto v^* = \langle \cdot, v \rangle$ により与えられる双対写像 $V \to V^*$ に対し，スカラーを拡大することにより複素線形写像 $V \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V, \mathbf{C})$ が得られる．この写像は複素線形同型写像 $V^{1,0} \to (V^*)^{0,1}$ を誘導する．この同型の外積をとることにより $\Lambda^*_{\mathbf{C}} V$ は $\Lambda^{0,*}_{\mathbf{C}}(V^*)$ と複素線形同型になる．この同型を大域化して，概複素多様体の正則接束の外積代数のなす束は $(0,q)$-形式のなす束と束同型であることが示された．その他はすべて系 3.4.5 からただちに従う． □

注意 3.4.7 微分形式の全体 $\Omega^i(X;\mathbf{R})$ はクリフォード積により $S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ に作用するとみなせることに注意しよう．X の計量を用いて $\Omega^i(X;\mathbf{R})$ を $\Lambda^i TX$ の切断全体と同一視できる．すると後者はクリフォード代数束 $Cl(X)$ の切断全体の部分空間と同一視できる．i-次微分形式の作用は次のようにして与えられる．$\mu = a^1 \wedge \cdots \wedge a^i$ で a^j は余接空間の各点で正規直交系をなすとする．ν によるクリフォード積は a^j 達によるクリフォード積の合成に等しく，各 a^j によるクリフォード積は

$$a^j \cdot \nu = \sqrt{2}(\pi^{0,1}(a^j) \wedge \nu - \pi^{0,1}(a^j) \angle \nu)$$

で与えられる．

ケーラー多様体上のディラク作用素． 今度は概複素構造は積分可能であり，ケーラー計量をもつ複素多様体に同伴する場合を考えよう．これは，リーマン計量をもち，複素構造から定まる J-作用素がその計量に関し直交変換であること，そしてさらに各点である正則局所座標が存在して，その座標に関し計量が 1 次のオーダーまで標準的計量に等しいことを仮定するということを意味する．ある点 x でそのような座標を用いてディラク作用素を計算したい．ここでは，系 3.4.5 で得られた複素構造から誘導される $Spin^c$-構造をとる．行列式

直線束は反標準束 K_X^{-1} と同一視され，もちろん X の複素構造は K_X^{-1} 上の正則構造を定める．また X の計量は K_X^{-1} のエルミート計量を定める．このとき，接続の $(0,1)$-部分が正則構造に関する $\bar{\partial}$-作用素に等しいという意味で正則構造と両立するような K_X^{-1} 上のエルミート接続が一意的に存在する[訳注 7)]．

上にみたように $Spin^c$-構造の複素スピノル束は $(0,q)$-形式のなす束と同一視される．σ を $(0,k)$-形式としよう．$(z^1,\cdots,z^n)$ を p のまわりの正則座標とし，$x^{2i-1}=\mathrm{Re}(z^i)$, $x^{2i}=\mathrm{Im}(z^i)$ とおくとき，リーマン計量は点 p で 1 次のオーダーまで標準計量であると仮定する．また，e_i を p における x^i 方向への単位接ベクトルとする．

定義により，複素スピノル束の任意の切断 σ に対し

$$\not{\partial}_A(\sigma)(p)=\sum_{i=1}^{2n} e_i\nabla_{e_i}(\sigma)(p)$$

である．計量は点 p で 1 次のオーダーまで標準的なので，接続 A は p で直積接続で，よって $\nabla_{e_i}=\partial_i$ である．したがって局所自明化に関し

$$\not{\partial}_A(\sigma)(p)=\sum_{i=1}^{2n} e_i\partial_i(\sigma)(p)$$

であり，一方これは

$$\sqrt{2}\sum_{i=1}^{2n}\pi^{0,1}(dx^i)\wedge\partial_i(\sigma)(p)-\pi^{0,1}(dx^i)\angle\partial_i(\sigma)(p)$$

に等しい．もちろん $\pi^{0,1}(dx^{2k-1})=d\bar{z}^k/2$ であり，$\pi^{0,1}(dx^{2k})=id\bar{z}^k/2$ であ

訳注 7) ここで基本事項の復習を兼ねて言葉の整理をしておこう．複素多様体 X 上の正則ベクトル束 $E\to X$ が与えられたとする．E の接続が正則接続（または $(1,0)$-型接続ともいう）であるとは，その接続形式が $(1,0)$-型であるときをいう．このことは共変微分の $(0,1)$-部分が $\bar{\partial}$ と一致することと同値である．次に E にエルミート計量（すなわち $U(n)$-構造）が与えられているとき，計量を保つ接続をエルミート接続（または $U(n)$-接続，あるいはユニタリ接続）という．基本的な定理として，与えられたエルミート計量に対し正則なエルミート接続が一意的に存在するという結果がある．特に X がケーラー多様体で $E=T^{1,0}X$ とすると，E の標準接続としてケーラー計量をエルミート計量とみなして得られる正則エルミート接続と，ケーラー計量を X のリーマン計量とみなして得られるレビ・チビタ接続との 2 つの接続が考えられるが，両者は一致する（これはケーラー幾何の基本的定理である）．よって K_X，K_X^{-1} の正則エルミート接続はレビ・チビタ接続から誘導されたものと同じである．詳細については [4] を参照せよ．

る．よって，

$$\partial\!\!\!/_A(\sigma)(p) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{n} d\bar{z}^k \wedge \frac{1}{2}(\partial_{2k-1}(\sigma)(p) + i\partial_{2k}(\sigma)(p))$$

$$-\sqrt{2}\sum_{i=1}^{2n} \pi^{0,1}(dx^i)\angle\partial_i(\sigma)(p)$$

であり，これは

$$\sqrt{2}\sum_{k=1}^{n} d\bar{z}^k \wedge \frac{\partial}{\partial\bar{z}^k}(\sigma) - \sqrt{2}\sum_{i=1}^{2n} \pi^{0,1}(dx^i)\angle\partial_i(\sigma)(p)$$

に等しい．縮約は第 1 成分に関し複素反線形なので，この最後の式を

$$\partial\!\!\!/_A(\sigma)(p) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{n} d\bar{z}^k \wedge \frac{\partial}{\partial\bar{z}^k}(\sigma)$$

$$- \sqrt{2}\sum_{k=1}^{n}(d\bar{z}^k)\angle\frac{1}{2}(\partial_{2k-1}(\sigma)(p) - i\partial_{2k}(\sigma)(p))$$

と書き直すことができる．これは

$$\partial\!\!\!/_A(\sigma)(p) = \sqrt{2}\left(\bar{\partial}(\sigma)(p) - \sum_{k=1}^{n} d\bar{z}^k\angle\frac{\partial}{\partial z^k}(\sigma)(p)\right)$$

と同じである．この表示は

$$\partial\!\!\!/_A(\sigma)(p) = \sqrt{2}\big(\bar{\partial}(\sigma)(p) + \bar{\partial}^*(\sigma)(p)\big)$$

と書き換えることができる．

4章

サイバーグ・ウィッテンモデュライ空間

4.1 方程式

前章までで向き付けられた4次元閉リーマン多様体 X 上で**サイバーグ・ウィッテン方程式**を書き下すための準備は整った．この方程式は X の接束の直交枠束に対する $Spin^c$-構造を必要とする．$\mathcal{L}$ により $\widetilde{P}$ の行列式直線束を表わす．今後 $\widetilde{P}$ の同伴複素プラスおよびマイナススピノル束を $S^{\pm}(\widetilde{P})$ で表わす．$S^{\pm}(\widetilde{P})$ はエルミート内積をもつことを思い出そう．また，$\mathcal{L}$ は $S^{\pm}(\widetilde{P})$ の両者の行列式直線束と同一視されるので $\mathcal{L}$ もエルミート内積をもつ．サイバーグ・ウィッテン方程式は，スピノル場 $\psi \in C^{\infty}(S^{+}(\widetilde{P}))$ と $\mathcal{L}$ のユニタリ接続 A に関する方程式であり，

$$F_A^+ = q(\psi) = \psi \otimes \psi^* - \frac{|\psi|^2}{2}\mathrm{Id}$$

$$\partial\!\!\!/_A(\psi) = 0$$

で与えられる．

方程式の説明． 第2式はほとんど説明の必要はない：前章で述べたように $\partial\!\!\!/_A$ は接束の枠束のレビ・チビタ接続と $Spin^c$-構造の行列式直線束の接続 A に同伴されたディラク方程式である．第1式について説明しよう．$S^{+}(\widetilde{P})$ はエルミート内積をもつので，この複素ベクトル束はその双対束と反線形同型である．

この同型による ψ の像を ψ^* で表わす．よって

$$\psi \otimes \psi^* \in S^+(\widetilde{P}) \otimes S^+(\widetilde{P})^* = \mathrm{End}_{\mathbf{C}}\left(S^+(\widetilde{P})\right)$$

となる．(1 点で $S^+(\widetilde{P})$ の基底をとり，この基底に関し

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

と書くと，

$$\psi \otimes \psi^* = \begin{pmatrix} |\psi_1|^2 & \psi_1\bar{\psi}_2 \\ \psi_2\bar{\psi}_1 & |\psi_2|^2 \end{pmatrix}$$

と表わせる．)　系 2.4.5 より，クリフォード積は同型

$$(Cl_0(P) \otimes \mathbf{C})^+ \cong \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(S^+(\widetilde{P}))$$

を誘導する．また補題 2.3.4 より，

$$(Cl_0(P) \otimes \mathbf{C})^+ = \mathbf{C}\left(\frac{1+\omega_{\mathbf{C}}}{2}\right) \oplus (\Lambda^2_+(TX) \otimes \mathbf{C})$$

である．この同型のもとに，$(1+\omega_{\mathbf{C}})/2$ は恒等写像として作用し，$S^+(\widetilde{P})$ のトレイス 0 の自己準同型全体は $\Lambda^2_+(TX) \otimes \mathbf{C}$ に対応する．明らかに $\psi \otimes \psi^*$ のトレイスは $|\psi|^2$ であり，したがって

$$q(\psi) = \psi \otimes \psi^* - \frac{|\psi|^2}{2}\mathrm{Id}$$

はトレイス 0 であり，$\Lambda^2_+(TX) \otimes \mathbf{C}$ の切断と同一視される．計量を用いて TX と T^*X を同一視すると (さらに複素線形に拡張すると)，$q(\psi)$ は複素数値自己双対 2 次微分形式になる．第 1 式は単にこの自己双対 2 次微分形式が曲率の自己双対部分と等しいことをいっている．

もう一つ証明すべき補題がある．

補題 4.1.1　上の 2 つの同型のもとに $q(\psi)$ は純虚数値自己双対 2 次微分形式である．

証明　実構造 $Cl_0^+(\mathbf{R}^4) \subset (Cl_0(\mathbf{R}^4) \otimes \mathbf{C})^+$ は $\mathbf{H} \subset \mathbf{C}[2]$ に同型であること

を思い出そう．すなわち 1 点における実クリフォード代数は 2 行 2 列の複素行列で

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

の形のものからなる．よって，元 $\lambda \in \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(S^+(\widetilde{P}))$ が実クリフォード代数に属するための必要十分条件は，λ が

$$\mathrm{Trace}(\lambda) \in \mathbf{R}$$

と

$$\lambda^* + \lambda = \mathrm{Trace}(\lambda)\mathrm{Id}$$

を満たすことである．構成から明らかなように $q(\psi)$ のトレイスは 0 である．ゆえに $q(\psi)$ が純虚数値自己双対 2 次微分形式から定まる自己準同型であることをみるには

$$(iq(\psi))^* + iq(\psi) = 0$$

を示しさえすればよい．しかし自己準同型の双対は単に共役の転置である．よって，

$$-i\ \overline{q(\psi)}^{tr} + iq(\psi) = 0,$$

または同値なことには

$$q(\psi) = \overline{q(\psi)}^{tr}$$

を証明すればよい．しかし，この式は $\psi \otimes \psi^*$ にも恒等写像の実数倍にも成り立つので，これが成り立つことは明らかである． □

4.2 配 位 空 間

この方程式を用いてモデュライ空間を作り，それから $Spin^c$-構造のサイバーグ・ウィッテン不変量を構成するために，この方程式を非線形楕円型方程式の枠組みの中におかなければならない．まず**配位空間**，すなわちこの方程式が関数を定める空間，を定義することからはじめよう．これは，$\widetilde{P}$ の行列式直線束 $\mathcal{L}$ の $U(1)$-接続 A と $S^+(\widetilde{P})$ の切断 ψ との組 (A, ψ) 全体の空間である．この

ようなものをとるための素朴な方法は，C^∞ 級の接続と切断をとることであろう．しかし技術的な理由でバナハ空間なりヒルベルト空間なりで考える方が便利である．よって最も簡単な方法は，これが唯一の方法ではないが，$\mathcal{C}(\widetilde{P})$ を

$$\mathcal{C}(\widetilde{P}) = \mathcal{A}_{L_2^2}(\mathcal{L}) \times L_2^2(S^+(\widetilde{P}))$$

により定義する方法である．ここに $\mathcal{A}_{L_2^2}(\mathcal{L})$ はユニタリ L_2^2-接続の空間で，また X 上の任意のベクトル束 V に対し，記号 $L_k^2(V)$ は V の L_k^2-切断の全体を表わす．実際には結果的にはこれより強いノルムならば何を使ってもよい；モデュライ空間はつねに同じであり，ゲージ同値で割ると C^∞-級のものが現われる．$\mathcal{C}(\widetilde{P})$ のかってな点での接空間は

$$L_2^2\left((T^*X \otimes i\mathbf{R}) \oplus S^+(\widetilde{P})\right)$$

と自然に同一視され，自然な L^2-内積をもつ．

サイバーグ・ウィッテン汎関数

$$F:\ \mathcal{C}(\widetilde{P}) \to L_1^2\left((\Lambda^2 T^*X \otimes i\mathbf{R}) \oplus S^-(\widetilde{P})\right)$$

を

$$F(A,\psi) = (F_A^+ - q(\psi), \partial\!\!\!/_A(\psi))$$

により定義する．この記号のもとに，サイバーグ・ウィッテン方程式は，単に方程式

$$F(A,\psi) = 0$$

により表わされる．

補題 4.2.1 サイバーグ・ウィッテン汎関数 F は滑らかな写像で，(A,ψ) における微分は線形写像

$$DF_{(A,\psi)} = \begin{pmatrix} P_+ d & -Dq_\psi \\ \cdot\dfrac{1}{2}\psi & \partial\!\!\!/_A \end{pmatrix}$$

で与えられる．ここに $\cdot\frac{1}{2}\psi$ は L_2^2-1 次微分形式 α を元 $\frac{1}{2}\alpha\cdot\psi \in L_1^2\left(S^-(\widetilde{P})\right)$ に送るクリフォード積を表わす．さらに

$$Dq_\psi(\eta)=\psi\otimes\eta^*+\eta\otimes\psi^*-\frac{\langle\eta,\psi\rangle+\overline{\langle\eta,\psi\rangle}}{2}\,\mathrm{Id}$$

で与えられる．この元もまたトレイス 0 の自己随伴自己準同型で，したがって純虚数値自己双対 2 次微分形式のクリフォード積と同一視される．

証明　微分の計算は直接計算することによりただちに従う．F はアファイン写像プラス ψ と A に関する 2 次式の形であることに注意しよう．ソボレフ積定理[訳注 1)] から，この 2 次式の項が滑らかな写像であることは明らかである．□

4.3　ゲージ変換群

ゲージ変換群すなわち束自己同型群の，配位空間およびサイバーグ・ウィッテン方程式の解空間への作用を考える必要がある．この群として，主 $Spin^c$-束 $\widetilde{P}$ の束自己同型で．接束の枠束の恒等写像を覆うもの全体をとる．このような束自己同型は X から $Spin^c(4)$ の中心 S^1 への写像で与えられる．このような場合にはいつでもそうであるように，作用が定義されるためには束自己同型の微分がもう 1 階高いところまでコントロールされる必要がある．そこで L^2_3-写像としての束自己同型をとることにする．(どのノルムを使うかを規定するのは束自己同型は連続でなければならないということである．$L^2_k\subset C^0$ であるためには少なくとも $k=3$ でなければならない．) L^2_3-位相で考えた束自己同型群を $\mathcal{G}(\widetilde{P})$ で表わす．これはヒルベルト多様体で，恒等写像における接空間は $i\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$ に値をもつ L^2_3-関数全体である．

補題 4.3.1　各点ごとの積により $\mathcal{G}(\widetilde{P})$ は無限次元アーベルリー群になる．そのリー環は $L^2_3(X;i\mathbf{R})$ (X 上の自明な束 $X\times i\mathbf{R}$ の L^2_3-切断全体の空間) で自明な括弧積をもつものと同一視される．

証明　証明すべきことは，積と逆元をとる写像がヒルベルト空間の滑らかな写像であることだけである．これは逆元に対しては明らかである；積を考えよ

訳注 1) [1], p.424 参照.

う．ポイントは連続なソボレフ空間の積

$$L^2_3(X) \times L^2_3(X) \to L^2_3(X)$$

があるということである．このことから結果はただちに従う． □

4.4 作　用

次に配位空間へのゲージ群の自然な作用があることを示そう．$\sigma \in \mathcal{G}(\widetilde{P})$ に対し，誘導束写像 $\det\sigma$ が $\mathcal{L}$ 上に，$S^{\pm}(\sigma)$ が $S^{\pm}(\widetilde{P})$ 上に定まる．$\det\sigma$ を X から S^1 への写像とみなすと，これは単に S^1 を S^1 に 2 乗でうつす写像のもとでの関数 σ の像であることに注意しよう．作用は

$$(A,\psi)\cdot\sigma = ((\det\sigma)^*A, S^+(\sigma^{-1})(\psi))$$

で与えられる．

補題 4.4.1 上の式は滑らかな右作用

$$\mathcal{C}(\widetilde{P}) \times \mathcal{G}(\widetilde{P}) \to \mathcal{C}(\widetilde{P})$$

を定義する．関数 F に対する変換則は

$$F((A,\psi)\cdot\sigma) = F(A,\psi)\cdot\sigma$$

となる．ここに σ の $L^2_1\left((\Lambda^2_+T^*X \otimes i\mathbf{R}) \oplus S^-(\widetilde{P})\right)$ への作用は第 1 直和因子へは自明で，第 2 直和因子へは $S^-(\sigma^{-1})$ により作用する．

証明 作用が滑らかであることはソボレフ積定理から容易に証明される． □

F に対する変換則を証明するには次の補題が必要である．

補題 4.4.2 $\sigma \in \mathcal{G}(\widetilde{P})$ とし，$\psi \in S^+(\widetilde{P})$ としよう．すると

$$\partial\!\!\!/_{(\det\sigma)^*A}(S^+(\sigma^{-1})(\psi)) = S^-(\sigma^{-1})(\partial\!\!\!/_A\psi)$$

が成り立つ．

証明 $(\det\sigma)^*A$ とレビ・チビタ接続から定まる $S^{\pm}(\widetilde{P})$ の接続を ∇' とし，A とレビ・チビタ接続から定まる $S^{\pm}(\widetilde{P})$ の接続を ∇ とすると，

$$\nabla' = S^{\pm}(\sigma)^{*}\nabla$$

となる．したがって

$$\nabla'(S^{\pm}(\sigma^{-1})(\psi)) = S^{\mp}(\sigma^{-1})(\nabla(\psi))$$

となる．クリフォード積は自己同型 $S^{\pm}(\sigma)$ と可換なので，これから補題は直接得られる． □

最初の補題はこの結果からただちに従う．特にサイバーグ・ウィッテン方程式の解の空間は $\mathcal{G}(\widetilde{P})$ の作用で不変である． □

定義 4.4.3 向き付けられた 4 次元閉リーマン多様体 X の $Spin^c$-構造 $\widetilde{P}$ を一つ固定する．サイバーグ・ウィッテン方程式の解の空間を $\mathcal{G}(\widetilde{P})$ の作用で割った商空間を**サイバーグ・ウィッテンモデュライ空間**といい，$\mathcal{M}(\widetilde{P})$ により表わす．

4.5 商空間

今度は $\mathcal{G}(\widetilde{P})$ の $\mathcal{C}(\widetilde{P})$ への作用の商空間について考えなければならない．よい商空間があることがはじめから明らかなわけではない．この問題を扱う前に，この作用に現われるいろいろなタイプの固定群について述べておこう．本節を通して底多様体 X は連結であることを暗に仮定する．

補題 4.5.1 元 $(A, \psi) \in \mathcal{C}(\widetilde{P})$ における $\mathcal{G}(\widetilde{P})$ の固定群は，$\psi = 0$ でない限り自明である．$\psi = 0$ の場合，固定群は X から S^1 への定値写像からなる群，すなわち S^1 と自然に同一視される群である．

定義 4.5.2 $\psi \neq 0$ のとき元 (A, ψ) は**既約**であるといい，そうでないとき**可約**であるという．既約な配位からなる開集合を $\mathcal{C}^*(\widetilde{P})$ で表わす．

証明 多様体 X は連結なので，任意の接続 A の固定群はちょうど X から S^1 への定値写像のなす群である．ψ が恒等的に 0 でない限りこの部分群は自由に ψ に作用する．ψ が恒等的に 0 の場合 ψ に自明に作用する． □

基本的収束定理.　作用の性質に関するより技術的結果に話をうつそう．次の補題は基本的である．

補題 4.5.3　(a_n, ψ_n) と (b_n, μ_n) を $\mathcal{C}(\widetilde{P})$ の点列で各々(a, ψ) と (b, μ) に収束するものとしよう．さらに各 n に対し

$$(a_n, \psi_n) \cdot \sigma_n = (b_n, \mu_n)$$

を満たす $\sigma_n \in \mathcal{G}(\widetilde{P})$ が存在すると仮定しよう．このとき σ_n の部分列である $\sigma \in \mathcal{G}(\widetilde{P})$ に収束するものが存在する．さらにこのとき

$$(a, \psi) \cdot \sigma = (b, \mu)$$

が成り立つ．

証明　σ_n はすべて円周に値をもつ関数なので，$\|\sigma_n\|_{L^6}$ は n によらない上限をもつ．$\tau_n = \det(\sigma_n)$ とおこう．明らかに $\|\tau_n\|_{L^6}$ の n によらない上限もある．$\tau_n^* a_n = b_n$ であるということは

$$d\tau_n = \tau_n(b_n - a_n)$$

を意味する．列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は各々 L^2_2-接続 a と b に収束するので，もちろん $\|a_n\|_{L^2_2}$ と $\|b_n\|_{L^2_2}$ は n によらず有界である．ソボレフ積定理 $L^6 \otimes L^2_2 \to L^5$ を用いると，$\|d\tau_n\|_{L^5}$ は n によらず有界である．これにより，$\|\tau_n\|_{L^5_1}$ は n によらず有界であることがいえた．このような靴紐結び的議論を続けると $\|\tau_n\|_{L^4_2}$ および $\|\tau_n\|_{L^2_3}$ の n によらない上からの評価を得る[訳注 2)]．ここで，埋め込み $L^2_3 \subset L^2_{2+\epsilon}\,(0 < \epsilon < 1)$ のコンパクト性から，τ_n の部分列を選んで $L^2_{2+\epsilon}$ で τ に収束するようにできる．明らかに $d\tau = \tau(b-a)$ であり，したがってもう一度ソボレフ積定理を用いて，$d\tau \in L^2_2$ であること，および $d\tau_n$ は $d\tau$ に L^2_2 で収束することがわかる．よって $\tau \in L^2_3$ であり，τ_n は τ に L^2_3 で収束する．したがって，部分列を選んで $(\sigma)^2$ は L^2_3 で τ に収束することが証明された．さらに

訳注 2)　今 $\|\tau_n\|_{L^6}$ が n によらず有界であることを出発点として $\|\tau_n\|_{L^5_1}$ が n によらず有界であることを証明したのと同様の議論を繰り返して，$\|\tau_n\|_{L^5_1}$ が n によらず有界であることを出発点として $\|\tau_n\|_{L^4_2}$ が n によらず有界であること，そしてさらに $\|\tau_n\|_{L^4_2}$ が n によらず有界であることを出発点として $\|\tau_n\|_{L^2_3}$ が n によらず有界であることを証明できる．このように微分の階数を 1 つずつ上げながら同じ議論を繰り返す方法を**靴紐結び的議論**という．

部分列を選んで，σ_n は L_3^2 で元 σ に収束するようにできる．$(a,\psi)\cdot\sigma=(b,\mu)$ であることは明らかである． □

系 4.5.4 商空間 $\mathcal{B}(\widetilde{P})=\mathcal{C}(\widetilde{P})/\mathcal{G}(\widetilde{P})$ はハウスドルフ空間である．

証明 問題になっている空間はいずれも第1可算なので，もし商空間がハウスドルフでないとしたら，$\mathcal{C}(\widetilde{P})$ の列 (a_n,ψ_n) と $\mathcal{G}(\widetilde{P})$ の列 σ_n が存在して，(a_n,ψ_n) はある (a,ψ) に収束し，$(a_n,\psi_n)\cdot\sigma_n$ はある (b,μ) に収束し，しかも (a,ψ) と (b,μ) は同じ軌道上にはない．しかしこれは不可能である——部分列をとると σ_n は σ に収束し，$(a,\psi)\cdot\sigma=(b,\mu)$ となるからである． □

スライス定理．

補題 4.5.5 $\mathcal{G}(\widetilde{P})$ の $\mathcal{C}(\widetilde{P})$ への作用に対し局所スライスが存在する．

注意 4.5.6 作用に対する**局所スライス**とは次のような意味である．各 $x\in\mathcal{C}(\widetilde{P})$ に対し，x の開近傍と滑らかに埋め込まれた (この開近傍の閉) ヒルベルト部分多様体 S で，S は x の固定群で不変で，かつ自然な写像

$$S\times_{\mathrm{Stab}(x)}\mathcal{G}(\widetilde{P})\to\mathcal{C}(\widetilde{P})$$

は x を通る軌道のある近傍への微分同相写像になるものがあるとしよう．このとき S を x における局所スライスという．

証明 まず，$(A,\psi)\in\mathcal{C}(\widetilde{P})$ における $\mathcal{G}(\widetilde{P})$ の作用の微分を考察しよう．この微分は写像

$$L_3^2(X;i\mathbf{R})\to L_2^2\Big((T^*X\otimes i\mathbf{R})\oplus S^+(\widetilde{P})\Big),$$
$$f\mapsto(2df,-f\cdot\psi)$$

で与えられる．スライスの線形版は単にこの写像の随伴作用素の核である．ただし随伴作用素は，定義域と値域の L^2-内積に関するものである．すなわち，線形写像

$$\Omega^1(X;i\mathbf{R})_{L_2^2}\oplus L_2^2(S^+(\widetilde{P}))\to\Omega^0(X;i\mathbf{R})_{L_1^2},$$

$$(\omega, \mu) \mapsto 2d^*\omega - i\mathrm{Im}\langle \mu, \psi \rangle$$

の核 K に対し，部分空間 $(A,\psi)+K$ を考える．線形部分空間 K は $\mathrm{Stab}(A,\psi)$ の作用で不変であることに注意しよう．

K の原点の $\mathrm{Stab}(A,\psi)$-不変開近傍 U を十分小さくとり $(A,\psi)+U$ を考えると，これが作用に対するスライスになることをみよう．そのような近傍を選び，写像

$$U \times_{\mathrm{Stab}(A,\psi)} \mathcal{G}(\widetilde{P}) \to \mathcal{C}(\widetilde{P}),$$
$$[u, \sigma] \mapsto ((A,\psi)+u)\cdot \sigma$$

を考えよう．これは無矛盾に定義された滑らかな写像である．その $[0, \mathrm{Id}]$ における微分は，写像

$$(K \oplus L^2_3(X; i\mathbf{R}))/\mathrm{stab}(A,\psi) \to L^2_2\left((T^*X \otimes i\mathbf{R}) \oplus S^+(\widetilde{P})\right),$$

ただし $\mathrm{stab}(A,\psi)$ は $\mathrm{Stab}(A,\psi)$ の接空間，で与えられる．この写像は第 1 直和因子上では包含写像で，第 2 直和因子上では $(2d, -(\cdot)\psi)$ で与えられる．K は写像 $(2d, -(\cdot)\psi)$ の像の直交補空間であり，$\mathrm{stab}(A,\psi)$ はこの写像の核であるから，上の微分は線形同型である．よって逆関数定理により，U を十分小さくとり，$V \subset \mathcal{G}(\widetilde{P})$ を十分小さい $\mathrm{Stab}(A,\psi)$-不変な単位元の近傍とすると，写像

$$U \times_{\mathrm{Stab}(A,\psi)} V \to \mathcal{C}(\widetilde{P})$$

は (A,ψ) の開近傍の上への微分同相写像となる．

必要ならば U をより小さい開集合に置き換えると，写像

$$U \times_{\mathrm{Stab}(A,\psi)} \mathcal{G}(\widetilde{P}) \to \mathcal{C}(\widetilde{P})$$

はある開集合の上への微分同相写像であることを示さなければならない．今みたように，この写像は局所微分同相写像であるので，示すべきことは U を十分小さくとるとこの写像は 1 対 1 であるということである．もし考えている写像が 1 対 1 になるような 0 の小さい近傍が存在しないとすると，U の 0 に収束する点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$，および群の元の列 $\{\sigma_n\}$ が存在して，

$$((A,\psi)+a_n)\cdot\sigma_n=(A,\psi)+b_n$$

であるが，ファイバー積のなかで $[a_n,\sigma_n]\neq[b_n,\mathrm{Id}]$ である．ところが補題 4.5.3 から部分列を取り出して，σ_n はある元 $\sigma\in\mathcal{G}(\widetilde{P})$ に収束するようにできる．明らかに $(A,\psi)\cdot\sigma=(A,\psi)$ である；すなわち $\sigma\in\mathrm{Stab}(A,\psi)$．このことは十分大きなすべての n に対し $[a_n,\sigma_n]$ と $[b_n,\mathrm{Id}]$ はどちらも $U\times_{\mathrm{Stab}(A,\psi)}V$ に含まれることを意味する．写像をこの集合に制限すると微分同相であったので，これは矛盾である．これにより微分同相に関する主張が証明され，作用に対するスライスの存在の証明が完了した． □

系 4.5.7 商空間 $\mathcal{B}(\widetilde{P})=\mathcal{C}(\widetilde{P})/\mathcal{G}(\widetilde{P})$ はハウスドルフ空間である．可約配位の同値類全体の補集合は開集合をなし，$\mathcal{B}^*(\widetilde{P})$ で表わされ，ヒルベルト多様体になる．その $[A,\psi]$ における接空間は

$$L_2^2\left((T^*X\otimes i\mathbf{R})\oplus S^+(\widetilde{P})\right)/\mathrm{Image}(2d,-(\cdot)\psi)$$

と同一視される．もし $[A,0]$ が可約な同値類とすると，商空間におけるこの点の近傍は，

$$L_2^2\left((T^*X\otimes i\mathbf{R})\oplus S^+(\widetilde{P})\right)/\mathrm{Image}(2d,0)$$

の 0 のある近傍を $S^1=\mathrm{Stab}(A,0)$ の作用で割ったものと同相である．この作用は線形かつ半自由 (semi–free) であり，不動点集合は可約配位の同値類全体のなす部分空間の接空間である．よって特に商空間において可約配位の同値類のなす滑層 (stratum) のまつわり (link) は $\mathbf{C}P^\infty$ とホモトピー同値である．

商空間のホモトピー型は容易に決定できる．

補題 4.5.8 $\mathcal{B}^*(\widetilde{P})$ を既約配位の同値類全体のなす $\mathcal{B}(\widetilde{P})$ の開集合とする．このとき $\mathcal{B}^*(\widetilde{P})$ は群 $(S^1)^X$ の分類空間である．よって，特に $\mathbf{C}P^\infty$ とアイレンベルグ・マクレイン空間 $K(H^1(X;\mathbf{Z}),1)$ の直積とホモトピー同値である．

証明 $\mathcal{C}(\widetilde{P})$ はアファイン空間であり，よって可縮である．可約なもののなす部分集合は無限余次元のアファイン部分空間であるので，既約なもののなす開集合 $\mathcal{C}^*(\widetilde{P})$ もまた可縮である．$(S^1)^X$ の作用は補集合の上で自由で局所スラ

イスをもつので，したがって $\mathcal{B}^*(\widetilde{P})$ は $(S^1)^X$ の分類空間である．この群は離散群 $H^1(X;\mathbf{Z})$ と単位元を含む連結成分との直積である．この連結成分は写像 $X \to S^1$ で定値写像にホモトピックなもの全体のなす群であり，S^1 とホモトピー同値である．分類空間のホモトピー型についての主張はこれからただちに従う． □

$\mathcal{B}^*(\widetilde{P})$ 上の S^1-束で，その第1チャーン類が $\mathbf{C}P^\infty$-因子に対応する $\mathcal{B}^*(\widetilde{P})$ の2次元整係数コホモロジーの生成元であるものが存在する．基点 $x \in X$ を固定し，$\mathcal{G}^0(\widetilde{P})$ を $\mathcal{G}(\widetilde{P})$ の部分群で，x 上のファイバーに自明に作用するゲージ変換全体からなるものとしよう．明らかに $\mathcal{G}^0(\widetilde{P})$ は x のファイバーで値をとる準同型写像 $\mathcal{G}(\widetilde{P}) \to S^1$ の核である．$\mathcal{C}^*(\widetilde{P})/\mathcal{G}^0(\widetilde{P})$ を $\mathcal{B}^0(\widetilde{P})$ で表わそう．これが求める $\mathcal{B}^*(\widetilde{P})$ 上の主 S^1-束の全空間である．この第1チャーン類が $\mathcal{B}^*(\widetilde{P})$ の $\mathbf{C}P^\infty$-因子の2次元コホモロジーを生成することをみるのは容易である．さらに，この主 S^1-束の第1チャーン類を可約滑層のまつわりに制限すると，まつわり (これは $\mathbf{C}P^\infty$ にホモトピー同値であることを思い出そう) の2次元コホモロジーの生成元となる．

4.6 楕円型複体

$(A,\psi) \in \mathcal{C}(\widetilde{P})$ をサイバーグ・ウィッテン方程式の解とする．ゲージ変換群の作用の線形化とサイバーグ・ウィッテン方程式の線形化を合わせた自然な同伴楕円型複体が存在する．これは $\mathcal{E}(A,\psi)$ で表わされる次の複体である：

$$0 \longrightarrow L_3^2(X;i\mathbf{R}) \longrightarrow L_2^2\Big((T^*X\otimes i\mathbf{R})\oplus S^+(\widetilde{P})\Big)$$
$$\longrightarrow L_1^2\Big((\Lambda_+^2T^*X\otimes i\mathbf{R})\oplus S^-(\widetilde{P})\Big) \longrightarrow 0.$$

ここに最初の写像は $(2d,-(\cdot)\psi)$ で与えられ，2番目の写像は行列

$$\begin{pmatrix} P_+d & -Dq_\psi \\ \cdot\frac{1}{2}\psi & \not{\partial}_A \end{pmatrix}$$

で与えられる．これが複体であること，そして楕円型であることを主張しよう．またそのオイラー標数を計算しよう．

主張 4.6.1 サイバーグ・ウィッテン方程式の任意の解 (A,ψ) に対し $\mathcal{E}(A,\psi)$ は複体になる．

証明 まず $\phi \in L^2_3(X;i\mathbf{R})$ からはじめよう．これの最初の写像による像は $(2d\phi, -\phi\psi)$ で，これより 2 つの写像の合成による像は

$$(2P_+dd\phi + Dq_\psi(\phi\psi), d\phi\cdot\psi - \partial\!\!\!/_A(\phi\psi))$$

である．もちろん $2P_+dd\phi = 0$ であり，$Dq_\psi(\phi\psi)$ は

$$\psi\otimes\bar{\phi}\psi^* + \phi\psi\otimes\psi^* - \mathrm{Re}\langle\psi,\phi\psi\rangle\mathrm{Id}$$

に等しい．ϕ は純虚数値であるから $\bar{\phi} = -\phi$ で，よって最初の 2 項は相殺する．同じ理由から最後の項も 0 になる．以上により合成の第 1 成分は 0 である．

第 2 成分を吟味しよう．ディラク作用素は関数環上微分として作用するので

$$\partial\!\!\!/_A(\phi\psi) = d\phi\cdot\psi + \phi\partial\!\!\!/_A(\psi)$$

となる．これより合成の第 2 成分は $-\partial\!\!\!/_A(\psi)$ に等しく，(A,ψ) はサイバーグ・ウィッテン方程式の解であるからこれは 0 になる． □

$[A,\psi]$ をサイバーグ・ウィッテン方程式の既約解とする．このとき 0 次コホモロジーは自明になる．この複体の 1 次コホモロジーは $[A,\psi]$ における接空間 $T\mathcal{B}^*(\widetilde{P})$ の有限次元線形部分空間となり，この点におけるモデュライ空間の**ザリスキー接空間** (または形式的接空間) とよばれる．この複体の 2 次コホモロジーは $[A,\psi]$ における**障害空間**とよばれる．したがってザリスキー接空間の次元から障害空間の次元をひいた数は，楕円複体のオイラー標数の (-1) 倍に等しい．障害空間が自明のとき，既約解において**モデュライ空間 $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ は滑らかである**という．陰関数定理から，既約点 $[A,\psi]$ で $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ が滑らかであるとき，$[A,\psi]$ の $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ のある近傍は $\mathcal{B}^*(\widetilde{P})$ の滑らかな部分多様体となり，$[A,\psi]$ におけるその接空間はこの点におけるザリスキー接空間になる．

さて，この楕円型複体のオイラー標数を計算しよう．最初にこの複体をホモトピーで変形して 0 次の項を取り除くことができることに注意しよう．このホ

モトピーは表象の完全列を変えないし，したがって複体のオイラー標数を変えない．その結果，変形された複体は次の2つの複体の直和となる：

$$0 \longrightarrow L^2_3(X; i\mathbf{R}) \xrightarrow{2d} L^2_2(T^*X \otimes i\mathbf{R}) \xrightarrow{P_+d} L^2_1(\Lambda^2_+ T^*X \otimes i\mathbf{R}) \longrightarrow 0,$$

および

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow L^2_2\left(S^+(\widetilde{P})\right) \xrightarrow{\not{D}_A} L^2_1\left(S^-(\widetilde{P})\right) \longrightarrow 0.$$

明らかにこの2つの複体はどちらも楕円型であり，したがって，もとの複体も楕円型であることが証明された．最初の複体のオイラー標数は $1+b_2^+(X)-b_1(X)$ であり，2番目の (複素) オイラー標数はマイナスディラク作用素の指数であり，これは

$$\frac{\sigma(X) - c_1(\mathcal{L})^2}{8}$$

に等しい．ここで関心があるのは実オイラー標数で，これは

$$1 + b_2^+(X) - b_1(X) + \frac{\sigma(X) - c_1(\mathcal{L})^2}{4}$$

で与えられる．さらにこれを端的な形に書くと

$$\frac{2\chi(X) + 3\sigma(X) - c_1(\mathcal{L})^2}{4}$$

となる．

系 4.6.2 $[A,\psi] \in \mathcal{M}(\widetilde{P})$ を既約点とする．このとき $[A,\psi]$ における $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ のザリスキー接空間の次元から $[A,\psi]$ における障害空間の次元をひいた数は

$$d = \frac{c_1(\mathcal{L})^2 - 2\chi(X) - 3\sigma(X)}{4}$$

に等しい．特に，もし $[A,\psi]$ が $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ の滑らかな既約点ならば，$[A,\psi]$ の近傍で空間 $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ は d 次元の滑らかな多様体である．

5章

曲率等式と有界性

本章の主結果はサイバーグ・ウィッテン方程式の解のモデュライ空間のコンパクト性である．実際，非常に強い形のコンパクト性があることがわかる：X の任意の計量に対し空でないモデュライ空間をもつ $Spin^c$-構造は有限個であり，しかもこれらのモデュライ空間の一つ一つがコンパクトである．(実は，ここでは隠された仮定がある．それは形式的次元が非負であるようなモデュライ空間のみを扱っているということである．もちろん方程式の生成的摂動を選べば，空でないモデュライ空間はすべて非負の形式的次元をもつ．）　このコンパクト性は2つの事実からの帰結である．第一に，ウーレンベックによる一般的なコンパクト性の判定法がある．今の場合にこれを応用すると，接続の曲率が L^2-有界であれば適当なゲージに関し接続が L^2_1-有界であるということが示される．第二の結果は，方程式の特殊性から今の場合のみ成り立ち ASD 接続の場合には成り立たない結果であるが，解のスピノル場に対して各点ごとの先験的有界性があり，そしてその帰結として曲率の自己双対部分に対しても各点ごとの先験的有界性が得られるということである．このことと，モデュライ空間の形式的次元が非負であるという仮定から得られる c_1^2 の有界性から，曲率の L^2-有界性が得られる．

まず，先験的有界性を証明するために必要な，曲率に関して知られている事柄についての説明からはじめよう．

5.1 曲率等式

∇ をリーマン多様体 X の接束上のレビ・チビタ接続とし，R をこの接続の曲率としよう：よって R は接束の反随伴自己準同型に値をもつ 2 次微分形式である．$U, V \in T_xX$ としよう．$R(U,V) : T_xX \to T_xX$ を，接ベクトルの順序対 (U,V) に対し曲率形式の値をとることにより得られる反随伴自己準同型とする．もちろん $R = \nabla \circ \nabla$ なので，T_xX の自己準同型として

$$R(U,V) = \nabla_U \circ \nabla_V - \nabla_V \circ \nabla_U - \nabla_{[U,V]}$$

である．

ただし右辺において U, V は x の近傍上のベクトル場に任意に拡張したものであるが，もちろん右辺は拡張の仕方にはよらない．

補題 5.1.1 点 $x \in X$ における任意の 3 つの接ベクトル U, V, W に対し，T_xX における次の等式が成り立つ：

$$R(U,V)W + R(V,W)U + R(W,U)V = O.$$

証明 x における接ベクトル A と B を x の近傍上のベクトル場に可換であるように拡張すると，捩れがないという条件は

$$\nabla_A(B) = \nabla_B(A)$$

で表わされることに注意しよう．

U, V, W を x の近傍上のベクトル場で互いの括弧積が 0 になるように拡張する．曲率はテンソルであるから，補題中の式の値は U, V, W の拡張の仕方によらない．もちろん曲率形式は，単に自己準同型に値をもつ 2 次微分形式で，TX の切断を TX に値をもつ 2 次微分形式にうつす写像 $\nabla \circ \nabla$ で与えられる．U, V, W を拡張するベクトル場は互いに括弧積が 0 になるようにとってあるので，

$$R(U,V)(W) = \nabla_U \circ \nabla_V(W) - \nabla_V \circ \nabla_U(W)$$

となり，U, V, W を巡回させたものについても同様である．これらをすべて集めると

$$R(U,V)(W)+R(V,W)(U)+R(W,U)(V)$$
$$=\nabla_U\circ\nabla_V(W)-\nabla_V\circ\nabla_U(W)+\nabla_V\circ\nabla_W(U)$$
$$-\nabla_W\circ\nabla_V(U)+\nabla_W\circ\nabla_U(V)-\nabla_U\circ\nabla_W(V)$$

となる．捩れがないという条件を用いて，第3項目，第5項目および第6項目の後ろの2つの接ベクトルを入れ換えると，右辺は0になる． □

定義 5.1.2 ∇ をリーマン多様体 X のリーマン接続の共変微分とし，R を曲率形式とする．X の**リッチ曲率**とは

$$\mathrm{Ric}(V,W)=\left\langle -\sum_i R(e_i,V)(e_i),W\right\rangle$$

で与えられる双線形形式である．ここに $(e_1,\cdots,e_n)$ は T_xX の正規直交基底である．$(x_1,\cdots,x_n)$ をある点 x において $\partial/\partial x_i=e_i$ となるような局所座標とする．このときこの点における曲率形式は

$$R=\sum_{k,l}\left(R^{k,l}_{i,j}\right)dx_k\wedge dx_l$$

で与えられる．この記号において上付の添え数は2次微分形式の添え数で，下付の添え数はリー環の行列の添え数である．このテンソルは上付の2つの添え数に関しても，下付の2つの添え数に関しても反対称である．曲率形式はまた次のようにも書き表わされる：

$$\sum_{i<j}\sum_{k,l}-R^{k,l}_{i,j}dx_k\wedge dx_l(e_i\wedge e_j)=\sum_{i<j}\sum_{k,l}R^{k,l}_{j,i}dx_k\wedge dx_l(e_i\wedge e_j).$$

ここに $e_i\wedge e_j$ は前と同様に，x_ix_j 平面における e_i から e_j への回転の無限小生成元を表わす．マイナスの符号があるのは，$e_i\wedge e_j$ は (j,i)-成分が 1 で (i,j)-成分が -1 の行列で表現されるからである．

よって $\langle R(e_i,e_j)(e_i),e_k\rangle=-R^{i,j}_{i,k}$ であり，これより

$$\mathrm{Ric}(e_j, e_k) = \sum_i R_{i,k}^{i,j}$$

となる．

補題 5.1.3 リッチ曲率の定義は正規直交基底のとり方によらない．またリッチ曲率は対称双線形形式である．

証明 2 つの正規直交基底 $(e_1, \cdots, e_n)$ と $(e'_1, \cdots, e'_n)$ をとり，直交行列 A に対し $e'_j = \sum_j A_{i,j} e_i$ とする．R は各変数に関し線形なので

$$\begin{aligned}\sum_j \langle R(e'_j, V)(e'_j), W\rangle &= \sum_i \sum_j A_{i,j} \langle R(e_i, V)(e'_j), W\rangle \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k A_{i,j} A_{k,j} \langle R(e_i, V)(e_k), W\rangle \\ &= \sum_{i,k} \left(\sum_j A_{i,j} A_{k,j} \langle R(e_i, V)(e_k), W\rangle \right)\end{aligned}$$

となる．A は直交行列なので

$$\sum_j A_{i,j} A_{k,j} = \delta_{i,k}$$

である．よって

$$\begin{aligned}\sum_j \langle R(e'_j, V)(e'_j), W\rangle &= \sum_{i,k} \delta_{i,k} \langle R(e_i, V)(e_k), W\rangle \\ &= \sum_i \langle R(e_i, V)(e_i), W\rangle\end{aligned}$$

を得る．これによりリッチ曲率が正規直交基底のとり方によらないことが証明された．

今度はリッチ曲率が対称であることを示そう．まず，曲率は 2 次微分形式であることから，$\langle R(U, V)(W), Y\rangle$ は最初の 2 つの変数に関しては反対称であることに注意しよう．次に，曲率形式は直交群のリー環に値をもち，このリー環は $\mathbf{R}^n$ の反対称自己準同型全体なので，後ろの 2 つの変数に関しても反対称で

ある．さらに，第1と第2変数の2つと第3と第4変数の2つを入れ換える操作に関し対称性があることを主張したい．リッチ曲率の対称性はこの対称性からただちに得られる．

補題 5.1.1 と反対称性を用いて，

$$\begin{aligned}\langle R(U,V)(W),Y\rangle &= -\langle R(W,U)(V),Y\rangle - \langle R(V,W)(U),Y\rangle \\ &= \langle R(W,U)(Y),V\rangle + \langle R(V,W)(Y),U\rangle \\ &= -\langle R(Y,W)(U),V\rangle - \langle R(U,Y)(W),V\rangle \\ &\qquad - \langle R(W,Y)(V),U\rangle - \langle R(Y,V)(W),U\rangle \\ &= 2\langle R(W,Y)(U),V\rangle + \langle R(U,Y)(V),W\rangle \\ &\qquad + \langle R(Y,V)(U),W\rangle \\ &= 2\langle R(W,Y)(U),V\rangle - \langle R(V,U)(Y),W\rangle \\ &= 2\langle R(W,Y)(U),V\rangle - \langle R(U,V)(W),Y\rangle\end{aligned}$$

が計算される．よって

$$\langle R(U,V)(W),Y\rangle = \langle R(W,Y)(U),V\rangle$$

が得られる． □

リッチ曲率を TX の対称自己準同型とみなしてトレイスをとることにより，もう一つの曲率が定義される．

定義 5.1.4 リーマン多様体 X の**スカラー曲率**とは，

$$\kappa = \mathrm{Trace}(\mathrm{Ric})$$

により定義される関数

$$\kappa\colon\ X \to \mathbf{R}$$

である．曲率形式に関しては

$$\kappa = \sum_{i,j} R^{i,j}_{i,j} = 2\sum_{i<j} R^{i,j}_{i,j}$$

と表わされる．X がリーマン面のときはスカラー曲率はガウス曲率の2倍であることに注意しよう．

次に，この理論で重要な役割を果たす**ボホナー型の公式**について説明しよう．

命題 5.1.5 X をリーマン多様体とし，$\widetilde{P} \to X$ を X に対する $Spin^c$-構造とする．A を $\det(\widetilde{P})$ 上の接続とし，$\partial\!\!\!/$ を直交枠束上のレビ・チビタ接続，および行列式束上の A から決まる $S(\widetilde{P})$ 上のディラク作用素とする．このとき $S(\widetilde{P})$ の任意の切断 ψ に対し

$$\partial\!\!\!/_A \circ \partial\!\!\!/_A(\psi) = \nabla_A^* \nabla_A(\psi) + \frac{\kappa}{4}\psi + \frac{F_A}{2} \cdot \psi \tag{5.1}$$

が成り立つ．ここに $F_A \in \Omega^2(X; i\mathbf{R})$ は A の曲率で，最後の項は 2 次微分形式のクリフォード積による作用である．

証明 R をレビ・チビタ接続の曲率形式とし TX の自己準同型に値をもつ 2 次微分形式とみなす．また F_A を A の曲率形式とし純虚数値 2 次微分形式とみなす．このとき接束の枠束と行列式束のファイバー積に対する共変微分の曲率形式 F は

$$F = R + F_A$$

となる．枠束の曲率 R を 3 章のように $-\sum_{i<j} R_{i,j} e_i \wedge e_j$ と書くと，$S(\widetilde{P})$ 上への F の作用は

$$F \cdot \psi = \frac{1}{2}\sum_{i<j} R_{j,i} e_i e_j \cdot \psi + \frac{F_A}{2} \cdot \psi$$

で与えられる．1 点で正規直交基底 $(e_1, \cdots, e_n)$ を固定しよう．この点で $\nabla_A = \nabla_{e_k} \otimes dx_k$ と書こう．ここで，$(e_1, \cdots, e_n)$ を互いに可換なベクトル場で，任意の k, l に対し $\nabla_{e_k}(e_l) = 0$ であるように拡張する．(例えばその点を中心とした正規座標を用いればよい．) このとき

$$\begin{aligned} &\sum_k e_k \nabla_{e_k} \left(\sum_l e_l \nabla_{e_l}(\psi) \right) \qquad (5.2) \\ &= \sum_{k,l} e_k e_l \nabla_{e_k} \circ \nabla_{e_l}(\psi) \\ &= \sum_k -\nabla_{e_k} \nabla_{e_k}(\psi) + \sum_{k<l} e_k e_l (\nabla_{e_k} \nabla_{e_l} - \nabla_{e_l} \nabla_{e_k})(\psi) \end{aligned}$$

$$= \sum_k -\nabla_{e_k}\nabla_{e_k}(\psi) + \sum_{k<l} e_k e_l F^{k,l}(\psi)$$

$$= \sum_k -\nabla_{e_k}\nabla_{e_k}(\psi) + \sum_{k<l} e_k e_l \left(\frac{1}{2}\sum_{i<j} R^{k,l}_{j,i} e_i e_j + \frac{F^{k,l}_A}{2} \right) \cdot \psi$$

となる．式 (5.2) の第 1 項を考察しよう．

主張 5.1.6

$$\nabla_A^* \nabla_A(\psi) = -\sum_k \nabla_{e_k}\nabla_{e_k}(\psi).$$

証明 まず，$S(\widetilde{P})$ に値をもつ 1 次微分形式に対し，$\nabla^* = - * \nabla_A *$，ただし $*$ はホッジ $*$-作用素，であることを示そう．α を $S(\widetilde{P})$ に値をもつ 1 次微分形式，φ を $S(\widetilde{P})$ の切断とする．このとき定義により

$$\langle \nabla_A \varphi, \alpha \rangle_{L^2} = \langle \varphi, \nabla_A^*(\alpha) \rangle_{L^2}$$

である．一方，接続は計量を保つので

$$d\langle \varphi(x), *\alpha(x) \rangle = \langle \nabla_A(\varphi)(x), *\alpha(x) \rangle + \langle \varphi(x), \nabla_A(*\alpha)(x) \rangle$$

となる．よって，

$$\begin{aligned} \langle \nabla_A(\varphi), \alpha \rangle_{L^2} &= \int_X \langle \nabla_A \varphi(x), *\alpha(x) \rangle \\ &= -\int_X \langle \varphi(x), \nabla_A(*\alpha)(x) \rangle \\ &= \langle \varphi, - * \nabla_A(*\alpha) \rangle_{L^2} \end{aligned}$$

を得る．これより，任意の φ と α に対し

$$\langle \varphi, \nabla_A^*(\alpha) \rangle_{L^2} = \langle \varphi, - * \nabla(*\alpha) \rangle_{L^2}$$

となる．よって任意の $S(\widetilde{P})$ に値をもつ 1 次微分形式に対し $\nabla^* = - * \nabla_A *$ が成り立つ．

これを主張に適用して，

$$\nabla_A^* \nabla_A(\psi) = - * \nabla_A \left(\sum_k \nabla_{e_k}(\psi) * (dx_k) \right)$$

$$= - * \sum_k \nabla_{e_k} \nabla_{e_k} (\psi) dvol$$

$$= - \sum_k \nabla_{e_k} \nabla_{e_k} (\psi)$$

を得る. □

次に式 (5.2) の第 2 項を考察しよう. R の上と下の添え数の反対称性より, 式 (5.2) の第 2 項は

$$\sum_{k<l} e_k e_l \left(\frac{1}{2} \sum_{i<j} R_{j,i}^{k,l} e_i e_j \psi \right) = \frac{1}{8} \sum_{k,l,i,j} R_{j,i}^{k,l} e_k e_l e_i e_j \psi$$
$$= \frac{-1}{8} \sum_{k,l,i,j} R_{i,j}^{k,l} e_k e_l e_i e_j \psi$$

と書き換えることができる. この項をいろいろな項に分割しよう：

$$\sum_{k,l,i,j} R_{i,j}^{k,l} e_k e_l e_i e_j \psi$$
$$= \sum_j \left(\widetilde{\sum_{k,l,i}} R_{i,j}^{k,l} e_k e_l e_i + \sum_{k,l} R_{k,j}^{k,l} e_k e_l e_k + R_{l,j}^{k,l} e_k e_l e_l \right) e_j \psi,$$

ここに右辺第 1 項は相異なる k, l, j にわたる和である. 第 1 項は補題 5.1.1 より 0 になる. 第 2 項と第 3 項は各々

$$\sum_j \sum_{k,l} R_{k,j}^{k,l} e_l e_j$$

と簡略化される. この 2 つを加えて, リッチ曲率は l, j に関し対称であることを用いると

$$2 \sum_{k,j} R_{k,j}^{k,j} e_j e_j \psi = -2 \sum_{k,j} R_{k,j}^{k,j} = -2\kappa\psi$$

を得る. よって式 (5.2) の第 2 項は $\frac{\kappa}{4}\psi$ になる.

最後に

$$\sum_{k<l} \frac{F_A^{k,l}}{2} e_k e_l \psi$$

を考察しよう．この式は，2 次微分形式 $F_A/2$ がスピノル場 ψ にクリフォード積で作用することの定義そのものである．

以上の 3 つの考察から

$$\partial\!\!\!/_A \partial\!\!\!/_A(\psi) = \nabla_A^* \nabla_A(\psi) + \frac{\kappa}{4}\psi + \frac{F_A}{2}\cdot\psi \tag{5.3}$$

を得る．これにより命題 5.1.5 の証明は終了する． □

系 5.1.7 (A,ψ) をコンパクト 4 次元リーマン多様体 X の $Spin^c$-構造 $\widetilde{P}$ に対するサイバーグ・ウィッテン方程式の解とする．このとき

$$\|\nabla_A(\psi)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\langle\kappa\psi,\psi\rangle_{L^2} + \frac{\|\psi\|_{L^4}^4}{4} = 0$$

が成り立つ．よって特に，κ_X^- を $\max(0,-\kappa(x))$ の $x \in X$ 上の最大値とおくと

$$\kappa_X^- \|\psi\|_{L^2}^2 \geq \|\psi\|_{L^4}^4$$

が成り立つ．

証明 ψ は調和スピノルなので，式 (5.1) から

$$0 = \partial\!\!\!/_A \partial\!\!\!/_A(\psi) = \nabla_A^* \nabla_A(\psi) + \frac{\kappa}{4}\psi + \frac{F_A}{2}\cdot\psi$$

を得る．ψ はプラススピノルであるということを使うと $F_A\cdot\psi = F_A^+\cdot\psi$ となる．よってサイバーグ・ウィッテン方程式の第 1 式を用いると，上の式を

$$0 = \nabla_A^* \nabla_A(\psi) + \frac{\kappa}{4}\psi + \frac{1}{2}\left(\psi\otimes\psi^* - \frac{|\psi|^2}{2}\mathrm{Id}\right)\psi$$

と書き換えることができる．これは

$$0 = \nabla_A^* \nabla_A(\psi) + \frac{\kappa}{4}\psi + \frac{|\psi|^2}{4}\psi$$

と簡略化される．さて両辺と ψ の L^2-内積をとり X 上で積分しよう．結果は

$$\|\nabla_A(\psi)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\langle\kappa\psi,\psi\rangle_{L^2} + \frac{\|\psi\|_{L^4}^4}{4} = 0$$

である． □

次の系はこの結果から直接得られる.

系 5.1.8 X を非負スカラー曲率をもつコンパクト 4 次元リーマン多様体とすると,(X の任意の $Spin^c$-構造に対する) サイバーグ・ウィッテン方程式の解は自明なスピノル場 ψ をもつ.

5.2 先験的有界性

式 (5.1) を用いて,サイバーグ・ウィッテン方程式の解のスピノル場の大きさに対する各点ごとの先験的有界性を証明することができる.

まず,C^∞-級の組 (A, ψ) 全体は配位空間の中で稠密なので,任意の配位 (A', ψ') は C^∞-級の組を通るスライス上の組 (A'', ψ'') にゲージ同値である. サイバーグ・ウィッテン方程式を C^∞-級の組を通るスライスに制限すると,C^∞-級係数をもつ楕円型方程式になる. よって C^∞-級の組を通るスライスに含まれるサイバーグ・ウィッテン方程式の解は実は C^∞-級である. これにより次の補題が証明された.

補題 5.2.1 任意のサイバーグ・ウィッテン方程式の解は C^∞-級の解にゲージ同値である.

系 5.2.2 X をコンパクト 4 次元リーマン多様体とする. $\kappa^- : X \to \mathbf{R}$ を $\kappa^-(x) = \max(-\kappa(x), 0)$ により定義し,$\kappa_X^- = \max_{x \in X} \kappa^-(x)$ とおく. $\widetilde{P} \to X$ を $Spin^c$-構造とする. (A, ψ) をこの $Spin^c$-構造に対するサイバーグ・ウィッテン方程式の解とする. このとき,任意の $x \in X$ に対し

$$|\psi(x)|^2 \leq \kappa_X^-$$

が成り立つ.

証明 任意の解は C^∞-級解とゲージ同値であり,証明しようとしている不等式はゲージ変換で不変なので,C^∞-級解の場合を考察すれば十分である. 以下この場合を考える.

点 $x_0 \in X$ で $|\psi(x)|^2$ が最大値をもつとし,

$$|\psi(x_0)|^2 \leq \kappa^-(x_0)$$

を証明しよう．明らかに，この不等式が証明されれば補題の証明は終わる．

(A, ψ) がサイバーグ・ウィッテン方程式の C^∞-級解であることからはじめよう．系 5.1.7 の証明中にみたように，任意の $x \in X$ に対し

$$\nabla_A^* \nabla_A(\psi)(x) + \frac{\kappa(x)}{4}\psi(x) + \frac{|\psi(x)|^2}{4}\psi(x) = 0$$

が成り立つ．ψ との各点ごとの内積をとって

$$\langle \nabla_A^* \nabla_A(\psi)(x), \psi(x)\rangle + \frac{\kappa(x)}{4}|\psi(x)|^2 + \frac{|\psi(x)|^4}{4} = 0$$

を得る．特に，$\langle \nabla_A^* \nabla_A(\psi)(x), \psi(x)\rangle$ は実数である．また，

$$\begin{aligned}
-\sum_i \frac{\partial^2}{\partial e_i^2}\langle \psi(x), \psi(x)\rangle = &-\sum_i \langle \nabla_{e_i} \circ \nabla_{e_i}(\psi)(x), \psi(x)\rangle \\
&- 2\sum_i \langle \nabla_{e_i}(\psi)(x), \nabla_{e_i}(\psi)(x)\rangle \\
&- \sum_i \langle \psi(x), \nabla_{e_i} \circ \nabla_{e_i}(\psi)(x)\rangle
\end{aligned}$$

である．これは

$$\begin{aligned}
&\Delta(|\psi(x)|^2) + 2|\nabla_{e_i}(\psi)(x)|^2 \\
&\qquad = \langle \nabla_A^* \circ \nabla_A(\psi)(x), \psi(x)\rangle + \langle \psi(x), \nabla_A^* \circ \nabla_A(\psi)(x)\rangle \\
&\qquad = 2\mathrm{Re}\langle \nabla_A^* \circ \nabla_A(\psi)(x), \psi(x)\rangle
\end{aligned}$$

を意味する．ここに Δ は関数に対するラプラシアンである．もし x_0 がその近傍上で $|\psi(x)|^2$ の最大値をとる点ならば，$\Delta(|\psi|^2)(x_0) \geq 0$ である．よって x_0 が局所的に最大値をとる点であると仮定すると

$$\mathrm{Re}\langle \nabla_A^* \circ \nabla_A(\psi)(x_0), \psi(x_0)\rangle \geq 0$$

となる．しかしすでにみたように，$\langle \nabla_A^* \circ \nabla_A(\psi)(x_0), \psi(x_0)\rangle$ は実数であったから

$$\langle \nabla_A^* \circ \nabla_A(\psi)(x_0), \psi(x_0)\rangle \geq 0$$

となる．

ゆえに，$|\psi(x)|^2$ が最大値をとる点 x_0 において

$$\frac{\kappa(x_0)}{4}|\psi(x_0)|^2+\frac{|\psi(x_0)|^4}{4}\leq 0$$

となる．したがって $|\psi(x_0)|^2=0$，つまり ψ は恒等的に 0 であるか，または

$$|\psi(x_0)|^2\leq\kappa^-(x_0)$$

が成り立つかのいずれかである．これにより系が証明された． □

系 5.2.3 (A,ψ) をサイバーグ・ウィッテン方程式の解とする．このとき任意の点 $x\in X$ において

$$|F_A^+(x)|\leq\frac{\kappa_X^-}{2}$$

が成り立つ．

証明 曲率についての式

$$F_A^+=\psi\otimes\psi^*-\frac{|\psi|^2}{2}\mathrm{Id}$$

より

$$|F_A^+(x)|=\frac{|\psi(x)|^2}{2}$$

である．よって前系よりただちに得られる． □

以上の評価から最初の “コンパクト性” 定理が得られる．すなわちサイバーグ・ウィッテン方程式の解が存在するような $Spin^c$-構造の個数を上から評価することができる．

定理 5.2.4 X にリーマン計量が与えられたとき，この計量に関するサイバーグ・ウィッテン方程式の解のモデュライ空間が空でなく非負形式的次元をもつような $Spin^c$-構造の同値類は有限個である．また，形式的次元が非負の任

意のサイバーグ・ウィッテン方程式の解 (A,ψ) と，任意の点 $x \in X$ に対し

$$
\begin{aligned}
|\psi(x)|^2 &\leq \kappa_X^-, \\
\|\nabla_A(\psi)\|_{L^2}^2 &\leq \frac{(\kappa_X^-)^2}{4}\mathrm{vol}(X), \\
|F_A^+(x)| &\leq \kappa_X^-/2, \\
\|F_A^+\|_{L^2}^2 &\leq (\kappa_X^-/2)^2\mathrm{vol}(X), \\
\|F_A^-\|_{L^2}^2 &\leq (\kappa_X^-/2)^2\mathrm{vol}(X) - 8\pi^2\chi(X) - 12\pi^2\sigma(X)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

証明 第 1 および第 3 の不等式は直前の 2 つの系で証明された．第 2 の不等式は，系 5.1.7 の第 1 式と上の第 1 の不等式より得られる．第 4 の不等式は第 3 の不等式を X 上で積分すればただちに得られる．最後の不等式は，第 4 の不等式および形式的次元が非負であるという仮定，すなわち

$$c_1(\mathcal{L})^2 - (2\chi(X) + 3\sigma(X)) \geq 0$$

より導き出される．実際，

$$c_1(\mathcal{L})^2 = \frac{1}{4\pi^2}(\|F_A^+\|_{L^2}^2 - \|F_A^-\|_{L^2}^2)$$

なので最後の不等式は容易に証明される．

今度は，モデュライ空間が空でなく形式的次元が非負であるような $Spin^c$-構造の同値類は有限個であることを示そう．上にみたようにモデュライ空間の形式的次元が非負であるようなサイバーグ・ウィッテン方程式の解 (A,ψ) に対し，$\|F_A^+\|_{L^2}^2$ および $\|F_A^-\|_{L^2}^2$ のリーマン構造のみに依存する上からの評価がある．このことは $iF_A/2\pi$ で代表されるコホモロジー類が $H^2(X;\mathbf{R})$ のコンパクト集合上にあることを意味する．この類は整係数類なので，このことは $Spin^c$-構造の行列式直線束の第 1 チャーン類 $c_1(\mathcal{L})$ が有限個の可能性しかないということを意味する．もちろん行列式直線束の第 1 チャーン類が与えられたものになるような $Spin^c$-構造の同値類は有限個しかない． □

5.3 モデュライ空間のコンパクト性

$Spin^c$-構造 $\widetilde{P} \to X$ を固定し，$\widetilde{P}$ に対するサイバーグ・ウィッテン方程式の解のモデュライ空間はコンパクトであることを示そう．

ゲージ固定補題. まず，$SU(2)$-束に対するウーレンベックの補題と同様なゲージ固定補題を必要とする．しかし今の場合，方程式は線形なのでずっと簡単である．

補題 5.3.1 $\mathcal{L}$ をエルミート計量をもつ X 上の直線束とする．$\mathcal{L}$ 上の C^∞-級ユニタリ接続を A_0 とする．このとき任意の $l \geq 0$ に対し，X, A_0, l のみに依存する定数 $K, C > 0$ が存在して次が成立する．$\mathcal{L}$ の任意の L^2_l ユニタリ接続 A に対し，ある L^2_{l+1} ゲージ変換 σ が存在して $(\det\sigma)^*(A) = A_0 + \alpha$ とおくと，$\alpha \in L^2_l(T^*X \otimes i\mathbf{R})$ は

$$d^*\alpha = 0$$

および

$$\|\alpha\|^2_{L^2_l} \leq C\|F^+_A\|^2_{L^2_{l-1}} + K$$

を満たす．

証明 $\alpha_0 \in L^2_l(T^*X \otimes i\mathbf{R})$ に対し $A = A_0 + \alpha_0$ と書く．元 $d^*(\alpha_0) \in L^2_{l-1}(i\mathbf{R})$ は定数関数全体に L^2-直交している．この直交補空間 $\mathcal{I}$ 上の連続線形作用素

$$\Delta^{-1} : \mathcal{I}_{L^2_{l-1}} \to \mathcal{I}_{L^2_{l+1}}$$

で，ラプラシアンを $\mathcal{I}$ に制限したものの逆作用素になるものが存在する．

$$s_0 = \frac{-1}{2}\Delta^{-1}(d^*(\alpha_0)) \in L^2_{l+1}(i\mathbf{R})$$

とおき，さらに $\sigma_0 = \exp(s_o)$ とおく．明らかに σ_0 は L^2_{l+1}-ゲージ変換である．$\alpha_1 \in \Omega^1(X; i\mathbf{R})$ を $\alpha_1 = \alpha_0 + 2ds_0$ とおく．このとき

$$(\det\sigma_0)^*A = A_0 + \alpha_1$$

となる．また明らかに

$$d^*(\alpha_1) = d^*(\alpha_0) - d^*d\Delta^{-1}d^*(\alpha_0) = 0$$

である．

以上により $A_0+\alpha_1$, $d^*(\alpha_1)=0$ となるように A をゲージ固定することができた．次に L_l^2 評価を証明しよう．線形作用素

$$(d^*, d^+):\ L_l^2(T^*X\otimes i\mathbf{R})\to L_{l-1}^2(i\mathbf{R}\oplus(\Lambda_+^2T^*X\otimes i\mathbf{R}))$$

は楕円型線形作用素で，その核は 1 次調和微分形式全体である．よって α_1 は，1 次調和微分形式 h と 1 次調和微分形式全体に直交する β の組 (h,β) に分解される．さらに，X と l にのみ依存する定数 C が存在して，1 次調和微分形式全体に直交する任意の 1 次微分形式 b に対し

$$\|b\|_{L_l^2}^2\le C\|(d^*(b), d^+(b))\|_{L_{l-1}^2}^2$$

となる．今の場合，もちろん $d^*(\beta)=0$ であり $d^+(\beta)=F_A^+-F_{A_0}^+$ である．これは

$$\|\beta\|_{L_l^2}^2\le C\|F_A^+-F_{A_0}^+\|_{L_{l-1}^2}^2\le C\|F_A^+\|_{L_{l-1}^2}^2+C\|F_{A_0}^+\|_{L_{l-1}^2}^2$$

を意味する．$K_1=\|F_{A_0}^+\|_{L_{l-1}^2}^2$ とおくことにより

$$\|\beta\|_{L_l^2}^2\le C\|F_A^+\|_{L_{l-1}^2}^2+CK_1$$

が証明される．

次に α_1 の調和射影 h を考察しなければならない．この項が有界である必要はなく，β に影響を与えることなくゲージ変換をしてこの項を有界にできればよい．

主張 5.3.2 すべての周期が $(2\pi/i)\mathbf{Z}$ に属するような任意の純虚数値 1 次調和微分形式 h_0 に対し，調和関数 $\varphi: X\to S^1$ で $d\varphi=h_0$ となるものが存在する．

証明 基点 $x_0\in X$ を選び，h_0 を道に沿って積分することにより，X の普遍被覆 $\widetilde{X}$ 上の C^∞-関数 $\widetilde{\varphi}:\widetilde{X}\to i\mathbf{R}$ が定義される．h_0 の周期は $(2\pi/i)\mathbf{Z}$ に含まれるので，$\widetilde{\varphi}$ は関数

$$\varphi:\ X\to i\mathbf{R}/2\pi i\mathbf{Z}=S^1$$

を定義する．明らかに，$d\varphi=h_0$ であり，したがって $d^*d\varphi=0$ なので φ は調和関数である． □

純虚数値 1 次調和微分形式全体の空間を，周期が $(4\pi/i)\mathbf{Z}$ に属するもの全体で割った商空間は，コンパクトトーラスである．よって l のみに依存する定数 K_2 が存在して，任意の純虚数値 1 次調和微分形式 h は，$\|h_1\|_{L_l^2} \le K_2$ なる 1 次調和微分形式 h_1 と，周期が $(2\pi/i)\mathbf{Z}$ に属する 1 次調和微分形式 h_2 を用いて $h = h_1 + 2h_2$ と表わされる．これを α_1 の調和射影 h に適用すると，$\|h_1\|_{L_l^2} \le K_2$ なる h_1 と調和関数 $\varphi\colon X \to S^1$ を用いて

$$h = h_1 - 2d\varphi$$

と書ける．明らかに

$$(\det\varphi)^*(A_0 + \alpha_1) = A_0 + \alpha_1 + 2d\varphi = A_0 + h_1 + \beta$$

である．$\alpha = h_1 + \beta$ とおくと

$$(\det\varphi)^*(\det\sigma_0)^*A = A_0 + \alpha,$$

かつ $d^*(\alpha) = 0$ であり，しかも

$$\begin{aligned}\|\alpha\|_{L_l^2}^2 &\le \|h_1\|_{L_l^2}^2 + \|\beta\|_{L_l^2}^2 \\ &\le K_2 + CK_1 + C\|F_A^+\|_{L_{l-1}^2}^2\end{aligned}$$

となる．

$K = K_2 + CK_1$ とおくことによりゲージ固定補題の証明が完了する．　□

dF_A^+ と A の有界性．　コンパクト性の証明の次のステップは，サイバーグ・ウィッテン方程式の任意の解 (A,ψ) に対し，dF_A^+ の L^2-ノルムの先験的有界性を証明することである．

補題 5.3.3　X のみに依存する定数 C が存在して，サイバーグ・ウィッテン方程式の任意の解 (A,ψ) に対し

$$\|dF_A^+\|_{L^2}^2 \le C$$

が成り立つ．

証明　$\nabla_{L.C.}$ によりレビ・チビタ接続

$$\nabla_{L.C.}\colon \Omega^0(X;\Lambda_+^2T^*X) \to \Omega^1(X;\Lambda_+^2T^*X)$$

を表わす．サイバーグ・ウィッテン方程式により

$$F_A^+ = \psi \otimes \psi^* - \frac{|\psi|^2}{2}\mathrm{Id}$$

である．よって

$$\nabla_{L.C.} F_A^+ = \nabla_A(\psi) \otimes \psi^* + \psi \otimes \nabla_A(\psi^*) - \mathrm{Re}\langle \nabla_A(\psi), \psi \rangle \mathrm{Id}$$

となる．しかし $\|\nabla_A(\psi)\|_{L^2}^2$ および ψ の L^∞ ノルムの先験的有界性はすでに示してある．これより明らかに $\|\nabla_{L.C.} F_A^+\|_{L^2}^2$ の先験的有界性を得る．しかしレビ・チビタ接続が捩れをもたないということを用いると，合成

$$\Omega_+^2(X; \mathbf{R}) = \Omega^0(X; \Lambda_+^2 T^* X) \xrightarrow{\nabla_{L.C.}} \Omega^1(X; \Lambda_+^2 T^* X) \to \Omega^3(X; \mathbf{R})$$

(ただし最後の写像は反対称化作用素) は外微分 d に等しいことが容易に示される．これより，$\|\nabla_{L.C.} F_A^+\|_{L^2}^2$ の有界性が $\|dF_A^+\|_{L^2}^2$ の有界性を意味する． □

系 5.3.4 X のみに依存する定数 C_1 が存在して，サイバーグ・ウィッテン方程式の任意の解 (A, ψ) に対し

$$\|F_A^+\|_{L_1^2}^2 \leq C_1$$

が成り立つ．

証明 ホッジ理論の基本事項を用いると，各 $l \geq 0$ に対し定数 $C' > 0$ が存在して，任意の自己双対 2 次微分形式 F に対し

$$\|\Pi(F)\|_{L_l^2}^2 \leq C' \|dF\|_{L_{l-1}^2}^2$$

が成り立つことが示すことができる[訳注 1)]．ただし Π は調和自己双対 2 次微分形式全体のなす空間の直交補空間への L^2-直交射影である．よって F_A^+ を自己双対調和形式 H^+ と調和形式全体の直交補空間の元 B を用いて $F_A^+ = H^+ + B$ と分解すると，

$$\|B\|_{L_1^2}^2 \leq C' \|dF_A^+\|_{L^2}^2 \leq C'C$$

を得る．一方，F_A^+ の先験的 L^2-有界性が成り立っているので，ある定数 $C'' > 0$ が存在して，F_A^+ の調和形式への射影 H^+ の L_1^2-ノルムの 2 乗は高々 C'' でお

訳注 1) $d + \delta$ は楕円型であるから $\|\Pi(F)\| \leq D\|(d+\delta)F\|$．しかし F は自己双対であるから $\|\delta F\| = \| * d * F\| = \| * dF\| = \|dF\|$．よって $C' = 2D$ ととればよい．

さえられる[訳注 2)]．$C_1 = C'C + C''$ とおくことにより補題の証明が終わる． □

これと前節のゲージ固定補題とを合わせると次の有界性を得る．

系 5.3.5 $\widetilde{P}$ を $Spin^c$-構造とし A_0 を $\mathcal{L} = \det(\widetilde{P})$ の固定した C^∞-接続とする．X と A_0 にのみ依存した定数 K_1 が存在して，サイバーグ・ウィッテン方程式の任意の解 (A, ψ) に対し，A とゲージ同値な接続 $A' = A_0 + \alpha$ で，

$$d^*\alpha = 0$$

かつ

$$\|\alpha\|^2_{L^2_2} \leq K_1$$

を満たすものが存在する．

***A* と *ψ* の C^∞-有界性．** 以上で A の L^2_2-有界性と ψ の L^∞-有界性から A と ψ 両方の C^∞-有界性を導き出すための準備が整った．用いるテクニックは楕円型方程式に対する標準的な靴紐結び的議論である．

定理 5.3.6 A_0 を行列式直線束の固定した C^∞-接続とする．任意の $l \geq 2$ に対し X, A_0 および l のみに依存する定数 $C(l)$ で次を満たすものが存在する．(A, ψ) をサイバーグ・ウィッテン方程式の任意の解とする．$A = A_0 + \alpha$ とゲージ固定し α は次を満たすようにしてあるとする．すなわち，$d^*\alpha = 0$ であり，しかも α の調和形式の空間への射影は周期が $(4\pi/i)\mathbf{Z}$ であるような調和形式全体のなす格子を法としたコンパクト基本領域に含まれると仮定する[訳注 3)]．このとき

$$\|\alpha\|^2_{L^2_l} + \|\psi\|^2_{L^2_l} \leq C(l)$$

が成立する．ただしスピノル場の L^2_l-ノルムは ∇_{A_0} に関しとるものとする．

証明 ψ は各点で有界であり，α は L^2_2 で有界であることはすでにみた．また $\|\nabla_A\psi\|^2_{L^2}$ が有界であることもみた．これと α の L^2_2-有界性から，ψ の L^2_1-

訳注 2) 調和形式全体は有限次元ベクトル空間である．よって任意のノルムは同値である．したがって特に L^2 有界ならば L^2_1 有界である．

訳注 3) このようにできることは補題 5.3.1 の証明中にみた．

有界性が得られる(ψ のノルムを定義するとき，A でなく A_0 に関する微分をとっていることを思い出そう).

次に ψ が L_3^2 で有界であることを示そう．ディラク方程式により

$$\partial\!\!\!/_{A_0}(\psi) = -\alpha\cdot\psi$$

である．α は L_2^2 で有界であり ψ は各点で有界なので，$\partial\!\!\!/_{A_0}(\psi)$ は L^4 で有界である．$\partial\!\!\!/_{A_0}$ は楕円型作用素なので，このことから ψ の $\partial\!\!\!/_{A_0}$ の核の直交補空間への L^2-射影は L_1^4 で有界である．一方 ψ は L^2 で有界なので，ψ の $\partial\!\!\!/_{A_0}$ の核への L^2-射影はまた L^2 で有界であり，したがって C^∞ でも有界である[訳注 4)]．これら 2 つを合わせると ψ の L_1^4-有界性が得られる．もう一度ソボレフ積定理 $L_2^2\otimes L_1^4\to L_1^3$ を用いると，$\partial\!\!\!/_{A_0}(\psi)$ は L_1^3 で有界で，よって ψ は L_2^3 で有界である．同様の議論を繰り返し，ソボレフ積定理 $L_2^2\otimes L_2^3\to L_2^2$ を用いると，$\partial\!\!\!/_{A_0}(\psi)$ は L_2^2 で有界であることがわかり，したがって ψ は L_3^2 で有界である．ψ が L_3^2 で有界であることがわかってしまうと，曲率の方程式とソボレフ積定理 $L_3^2\otimes L_3^2\to L_3^2$ より，F_A^+ は L_3^2 で有界であることがわかり，よってゲージ固定補題により α は L_4^2 で有界である.

これにより，靴紐結び的議論の等質な部分にたどりついた．ある $l\geq 3$ に対し，α と ψ の L_l^2-ノルムが有界であると帰納的に仮定しよう．するとディラク方程式と連続な積写像 $L_l^2\otimes L_l^2\to L_l^2$ から $\partial\!\!\!/_{A_0}(\psi)$ は L_l^2 で有界で，したがって ψ は L_{l+1}^2 で有界である．曲率の方程式から F_A^+ は L_l^2 で有界で，よってゲージ固定補題から α は L_{l+1}^2 で有界である．これにより帰納法が完了する． □

埋め込み $L_l^2\subset C^{l-3}$ のコンパクト性を用いると，次の強いコンパクト性が得られる.

系 5.3.7 (A_n,ψ_n) をサイバーグ・ウィッテン方程式の解の任意の列とする．このとき部分列をとり直し，L_3^2-ゲージ変換を施して，(A_n,ψ_n) は C^∞-級であり C^∞-位相で極限 (A,ψ) に収束するようにできる．このときこの極限もサイバーグ・ウィッテン方程式を満たす．特に，サイバーグ・ウィッテン方程式の解のモデュライ空間はコンパクトである.

[訳注 4)] 脚注 2) を参照せよ.

モデュライ空間は，任意の $l \geq 2$ に対する L^2_l-ノルムを用いて定義できるが，定理 5.3.6 の証明はこれらは l にはよらず互いに微分同相であることの証明も与える．すなわち，

系 5.3.8 任意の $l \geq 2$ に対し，$\mathcal{C}_l(\widetilde{P})$ を L^2_l の組 (A, ψ) 全体のなす配位空間，$\mathcal{G}_{l+1}(\widetilde{P})$ を L^2_{l+1}-ゲージ変換のなす群とする．商空間を $\mathcal{B}_l(\widetilde{P})$ とし，既約元の同値類のなす開部分集合を $\mathcal{B}^*_l(\widetilde{P})$ とする．このとき $\mathcal{B}^*_l(\widetilde{P})$ はヒルベルト多様体である．$\mathcal{M}_l(\widetilde{P}) \subset \mathcal{B}_l(\widetilde{P})$ をサイバーグ・ウィッテン方程式の解の同値類のモデュライ空間とする．このとき自然な写像

$$\iota_l : \mathcal{B}_l(\widetilde{P}) \to \mathcal{B}(\widetilde{P})$$

は包含写像であり，既約類のなす開部分集合上では滑らかな埋め込みになる．しかも，ι_l は $\mathcal{M}_l(\widetilde{P})$ から $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ への同相写像を誘導する．任意の既約解 $[A, \psi] \in \mathcal{M}_l(\widetilde{P})$ において ι_l の微分はモデュライ空間のザリスキー接空間の同型を誘導する．特に既約な正則点からなる $\mathcal{M}_l(\widetilde{P})$ の開部分集合は，既約な正則点からなる $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ の開部分集合に微分同相にうつされる．

6 章

サイバーグ・ウィッテン不変量

6.1 主 結 果

一般に，サイバーグ・ウィッテン方程式の解の空間が滑らかな多様体になると期待する理由はない．期待できる最善のことは生成的 (generic) な助変数に対しては滑らか多様体になるということである．$SU(2)$-反自己双対接続を用いたドナルドソン理論では，計量を助変数として用いることで，生成的計量に対して反自己双対モデュライ空間は滑らかになることが示された ([2] の第 3 章，3.2 節を参照)．それに対し本書のサイバーグ・ウィッテン理論の場合は，生成的計量に対し同様なことが成り立つという結果は知られていない．その代わりに別な摂動の族を用いる．すなわち，曲率の方程式に純虚数値自己双対 2 次微分形式を加えることによる摂動を考える．

定理 6.1.1 $b_2^+ > 0$ と仮定する．X の計量は固定する．このとき X の生成的 C^∞ 自己双対実 2 次微分形式 h に対し次が成立する．X の任意の $Spin^c$-構造 $\widetilde{P}$ に対し，**摂動サイバーグ・ウィッテン方程式**：

$$(SW_h): \qquad F_A^+ = q(\psi) + ih,$$

$$\partial\!\!\!/_A(\psi) = 0$$

の解のゲージ同値類 $[A,\psi]$ 全体のなすモデュライ空間 $\mathcal{M}(\widetilde{P},h) \subset \mathcal{B}(\widetilde{P})$ は $\mathcal{B}^*(\widetilde{P})$ の滑らかなコンパクト部分多様体をなし，その次元は

$$\frac{c_1(\mathcal{L})^2 - (2\chi(X) + 3\sigma(X))}{4}$$

である．ここに $\chi(X)$ と $\sigma(X)$ は各々 X のオイラー標数と符号数である．特にもしこの次元が $Spin^c$-構造 $\widetilde{P}$ に対し負ならば，$\widetilde{P}$ に対する摂動サイバーグ・ウィッテン方程式は解をもたない．

この定理の証明はいくつかのステップに分かれる．まず最初に助変数付きモデュライ空間を導入しよう．

6.2 助変数付きモデュライ空間

X の $Spin^c$-構造 $\widetilde{P}$ を固定しよう．すべての自己双対 2 次微分形式で助変数付けられた助変数付きモデュライ空間を調べ，この空間が滑らかであることを証明したい．C^∞-級微分形式を用いるのはあまり便利でなく，むしろ微分形式のソボレフ空間を用いる方が便利である．5 章で得たような各点ごとの有界性が摂動された方程式の解に対しても成り立つことを必要とするので，摂動は連続的であることを要請する．そこで，摂動する微分形式は L^2_3 であるということにする (これより強いノルムを使うこともできるが)．楕円型理論を使うために，L^2_4-配位と L^2_5-ゲージ変換を調べる必要がある．$\mathcal{C}_4(\widetilde{P})$ を L^2_4-配位全体の空間とし，$\mathcal{G}_5(\widetilde{P})$ を L^2_5-ゲージ変換群とする．

写像

$$F:\ \mathcal{C}_4(\widetilde{P}) \times L^2_3(\Lambda^2_+ T^*X) \to L^2_3\left((\Lambda^2_+ T^*X \otimes i\mathbf{R}) \oplus S^-(\widetilde{P})\right)$$

を，元 (A, ψ, h) を元

$$F(A, \psi, h) = (F_A^+ - q(\psi) - ih, \partial\!\!\!/_A(\psi))$$

に送ることによって定義しよう．

補題 6.2.1 $F(A, \psi, h) = 0$ かつ $\psi \neq 0$ なる任意の点 (A, ψ, h) において，この写像の微分 DF は全射である．

証明 まず，微分 DF を h-座標に制限したものは値域の第 1 因子への包含

写像の $(-i)$ 倍になっていることに注意しよう．これにより，DF を定義域の第2因子に制限したものは値域の第1因子への全射になる．$\mathcal{C}_4(\widetilde{P})$ の接空間

$$L_4^2\left((T^*X \otimes i\mathbf{R}) \oplus S^+(\widetilde{P})\right)$$

に微分 DF を制限した写像に，値域の第2因子への射影を左から合成した写像は全射であることを示せば，補題の証明は完了する．この合成写像は

$$G: \ (a,\eta) \mapsto \partial\!\!\!/_A(\eta) + \frac{1}{2}a \cdot \psi,$$

ただし第2項の積はクリフォード積，で与えられる．G が全射であることを示そう．元 $\lambda \in L_3^2(S^-(\widetilde{P}))$ が G の像に L^2-直交しているとしよう．特に λ はディラク作用素 $\partial\!\!\!/_A$ の像に直交している．よって，$\partial\!\!\!/_A$ は自己随伴であるので，λ は $S^-(\widetilde{P})$ 上のディラク作用素の核に属する．$\lambda \neq 0$ と仮定する．楕円型方程式の解に対する一意接続性から，この仮定は λ が X の任意の空でない開集合上で恒等的に 0 になることはないということを意味する．同様に，ψ は $\partial\!\!\!/_A$ の核に属し，また仮定より 0 でないので，ψ は任意の空でない開集合上で恒等的に 0 になることはない．もちろん λ と ψ は連続である．x_0 を中心とした開球 $U \subset X$ を十分小さく選ぶことにより，この球上の適当な局所座標に関し ψ と λ は定数に十分近いと仮定してよい．さてクリフォード代数の一般論より，自然な包含写像と射影の合成 $\mathbf{R}^4 \to Cl_1(\mathbf{R}^4)^-$ は同型であり，クリフォード積は同型写像

$$\mathbf{R}^4 \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \cong (Cl_1(\mathbf{R}^4) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})^- \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(S^+(\mathbf{R}^4), S^-(\mathbf{R}^4))$$

を誘導する．このことは，与えられた 0 でないベクトル $\sigma^\pm \in S^\pm(\mathbf{R}^4)$ に対し，ある元 $a \in \mathbf{R}^4$ で

$$\mathrm{Re}\langle a \cdot \sigma^+, \sigma^- \rangle > 0$$

を満たすものが存在することを意味する．したがって，あるベクトル $a \in T^*X_{x_0}$ で

$$\mathrm{Re}\langle a \cdot \psi(x_0), \lambda(x_0) \rangle > 0$$

を満たすものが存在する．局所座標から誘導される余接束の局所自明化を用いて a を U 全体に拡張し，U 上の1次微分形式 a で，各点 $x \in U$ で

$$\mathrm{Re}\langle a\cdot\psi(x),\lambda(x)\rangle>0$$

を満たすものが得られる．U の境界の近くで 0 につぶして，X 上の大域的 1 次微分形式 a で U の外では恒等的に 0 になり，

$$\int_X \mathrm{Re}\langle a\cdot\psi(x),\lambda(x)\rangle dvol>0$$

を満たすものが得られる．これは λ が $G(2a,0)$ には直交しないことを意味する．これは矛盾であり，

$$DF_{(A,\psi,h)}:\ L^2_4\Big((T^*X\otimes i\mathbf{R})\oplus S^+(\widetilde{P})\Big)\oplus L^2_3(\Lambda^2_+T^*X)$$
$$\to L^2_3\left((\Lambda^2_+T^*X\otimes i\mathbf{R})\oplus S^-(\widetilde{P})\right)$$

の像の直交補空間は $\{\mathbf{o}\}$ であること，よってこの線形写像は全射であることが証明された．これにより補題の証明は完了した． □

命題 6.2.2 X を向き付けられた 4 次元閉リーマン多様体とする．X のスピン構造 $\widetilde{P}$ を固定する．既約解の助変数付きモデュライ空間，すなわち $F_A^+=q(\psi)+ih$ かつ $\partial\!\!\!/_A(\psi)=0$ を満たす $([A,\psi],h)$ 全体からなる部分空間

$$\mathcal{PM}^*(\widetilde{P})\subset\mathcal{B}^*_4(\widetilde{P})\times L^2_3(\Lambda^2_+T^*X)$$

は滑らかな部分多様体をなす．この部分多様体の助変数空間 $L^2_3(\Lambda^2_+T^*X)$ への射影は滑らかである．h 上のファイバーは $\mathcal{M}^*(\widetilde{P},h)$ で表わされる．これは摂動サイバーグ・ウィッテン方程式 SW_h の既約解の，ゲージ変換を法としたモデュライ空間である．射影写像の $([A,\psi],h)$ における微分の核は，モデュライ空間 $\mathcal{M}^*(\widetilde{P},h)$ の $[A,\psi]$ におけるザリスキー接空間である．横断性条件より，余核は $\mathcal{M}^*(\widetilde{P},h)$ に対する $[A,\psi]$ における障害空間と同一視される．よって射影写像の微分はフレドホルムで，その指数は

$$d(\mathcal{L})=\frac{c_1(\mathcal{L})^2-(2\chi(X)+3\sigma(X))}{4}$$

に等しい．

証明 補題より，$F_A^+=q(\psi)+ih$ かつ $\partial\!\!\!/_A(\psi)=0$ を満たす 3 つ組 (A,ψ,h)

全体からなる部分空間

$$\widetilde{\mathcal{PM}}^*(\widetilde{P}) \subset \mathcal{C}_4^*(\widetilde{P}) \times L_3^2(\Lambda_+^2 T^*X)$$

は滑らかな部分多様体になる．ゲージ変換群の作用で割ると滑らかな部分多様体

$$\mathcal{PM}^*(\widetilde{P}) \subset \mathcal{B}^*(\widetilde{P}) \times L_3^2(\Lambda_+^2 T^*X)$$

が得られる．射影写像の微分に関する主張も容易に証明される． □

系 6.2.3 生成的な $h \in L_3^2(\Lambda_+^2 T^*X)$ に対し，摂動サイバーグ・ウィッテン方程式 SW_h の既約解の空間 $\mathcal{M}^*(\widetilde{P}, h)$ は，$\mathcal{B}_4^*(\widetilde{P})$ の $d(\mathcal{L})$-次元の滑らかな部分多様体になる．

証明 スメイル・サードの定理により，前の結果から生成的 $h \in L_3^2(\Lambda_+^2 T^*X)$ に対し，摂動サイバーグ・ウィッテン方程式 SW_h の任意の既約解において，方程式の線形化は全射である．さらに，この方程式の既約解のモデュライ空間は滑らかな (無限次元) 多様体である．ゲージ群の作用 (既約解のみを考えているのでこれの作用は自由である) で割ると，摂動サイバーグ・ウィッテン方程式の既約解のゲージ同値類のモデュライ空間は滑らかな多様体であり，その次元は基本楕円型複体 $\mathcal{E}(A, \psi)$ のオイラー標数の -1 倍で与えられる． □

6.3 可約解

次に可約解の問題を考察しよう．ここが条件 $b_2^+ > 0$ を使うところである．

命題 6.3.1 $b_2^+ > 0$ と仮定する．$\widetilde{P} \to X$ を $Spin^c$-構造とし，$c_1(\mathcal{L})$ は捩れコホモロジー類ではないとしよう．このとき生成的計量に対し，サイバーグ・ウィッテン方程式には可約解は存在しない．また，任意の $Spin^c$-構造に対し，もしサイバーグ・ウィッテン方程式が可約解をもたないならば，前節のような任意の十分小さい方程式の摂動に対し可約解は存在しない．さらに，任意の計量と生成的摂動に対し可約解は存在しない．

証明 サイバーグ・ウィッテン方程式の可約解は，行列式直線束の反自己双対接続とゼロスピノル場の組のことである．そのような ASD 接続の曲率は，行

列式直線束の第1チャーン類の $2\pi/i$ 倍を代表する2次調和微分形式である．この調和形式は ASD であるので，任意の自己双対2次調和微分形式と直交していなければならない．[11] の議論によれば，もし $c_1(\mathcal{L}) \in H^2(X;\mathbf{R})$ が0でないならば，この条件は計量全体のなす空間において余次元 b_2^+ の閉条件 (closed condition) である．

任意の計量に対し，摂動方程式の可約解は $F_A^+ = ih$ を満たす．もし h の自己双対調和形式への射影が $-2\pi c_1$ の自己双対調和形式への射影に等しくないならば，そのような解は存在しない．このことから最後の2つの主張はただちに得られる． □

系 6.3.2 X を $b_2^+(X) > 0$ なる滑らかな向き付けられた閉リーマン多様体とする．このとき生成的 L_3^2-自己双対実2次微分形式 h に対し，モデュライ空間 $\mathcal{M}(\widetilde{P}, h)$ は $\mathcal{B}^*(\widetilde{P})$ の 滑らかな $d(\mathcal{L})$-次元部分多様体になる．

証明 生成的摂動に対し摂動方程式は可約解をもたないこと，そして各既約解においてモデュライ空間は滑らかで与えられた次元をもつことを上で証明した． □

6.4 摂動モデュライ空間のコンパクト化

命題 6.4.1 向き付けられた4次元閉リーマン多様体 X と $Spin^c$-構造 $\widetilde{P}$ を固定しよう．任意の $h \in L_3^2(\Lambda_+^2 T^* X)$ に対しモデュライ空間 $\mathcal{M}(\widetilde{P}, h)$ はコンパクトである．

証明 摂動方程式の解の場合，ボホナー公式 (式 (5.3)) より，

$$0 = \nabla_A^* \nabla_A(\psi) + \frac{\kappa}{4}\psi + \frac{|\psi|^2}{4}\psi + ih \cdot \psi \tag{6.1}$$

を得る．各点で ψ と内積をとり，$|\psi|$ が最大値をもつ点 x_0 で系 5.2.2 の証明と同じ議論を繰り返すことにより，

$$0 \geq \frac{\kappa(x_0)}{4}|\psi(x_0)|^2 + \frac{|\psi(x_0)|^4}{4} + \mathrm{Re}\langle ih(x_0)\cdot\psi(x_0), \psi(x_0)\rangle$$

を得る．この式の最後の項のノルムは高々

$$|h(x_0)||\psi(x_0)|^2$$

でおさえられる．よって $\psi(x_0)=0$，すなわち ψ は恒等的に 0 か，または

$$0 \geq \frac{\kappa}{4} + \frac{|\psi(x_0)|^2}{4} - |h(x_0)|$$

が成り立つかのどちらかである．したがって，もし ψ が恒等的に 0 でないならば，任意の $x \in X$ に対し

$$|\psi(x_0)|^2 \leq 4|h(x_0)| - \kappa(x_0)$$

が成り立つ．このことは，摂動方程式の任意の解に対し

$$|\psi(x)|^2 \leq \max\left(\max_{y\in X}(4|h(y)| - \kappa(y)), 0\right)$$

が成り立つことを意味する．ψ のこの各点ごとの評価は，系 5.2.2 の評価の代わりになるものである．

また $\|\nabla_A(\psi)\|_{L^2}^2$ の先験的評価もある．この評価は式 (6.1) と ψ との L^2 内積をとって得られる．実際，

$$\|\nabla_A(\psi)\|_{L^2}^2 + \frac{\kappa}{4}\|\psi\|_{L^2}^2 + \frac{\|\psi\|_{L^4}^4}{4} + \langle ih\psi, \psi\rangle_{L^2} = 0$$

を得る．κ, ψ, h はすべて先験的評価をもつので，$\|\nabla_A(\psi)\|_{L^2}^2$ もまた先験的に有界である．

この 2 つの先験的評価があれば議論は 5.3 節とまったく同様に進めることができて，解は任意の l に対し L_l^2 で有界であることが示される．ゆえに摂動方程式に対するモデュライ空間はコンパクトであることがわかる． □

系 6.4.2 $b_2^+(X) > 0$ とし，X の $Spin^c$-構造 $\widetilde{P}$ を固定する．このとき稠密な開集合 $U(\widetilde{P}) \subset L_3^2(\Lambda_+^2 T^*X)$ で次の性質をもつものが存在する：任意の $h \in U(\widetilde{P})$ に対しモデュライ空間 $\mathcal{M}(\widetilde{P}, h)$ は既約解のみからなり，$\mathcal{B}^*(\widetilde{P})$ の

滑らかなコンパクト $d(\mathcal{L})$-次元部分多様体になる．

証明 上で証明したように，既約解のなす助変数付きモデュライ空間

$$\mathcal{PM}^*(\widetilde{P}) \subset \mathcal{B}_4^*(\widetilde{P}) \times L_3^2(\Lambda_+^2 T^*X)$$

は滑らかな部分多様体であり，この部分多様体の助変数空間 $L_3^2(\Lambda_+^2 T^*X)$ への射影は滑らかな写像である．$b_2^+(X) > 0$ なので，助変数空間の全疎閉部分集合で，その元に対する摂動サイバーグ・ウィッテン方程式は既約解をもつものが存在する．助変数空間からこの部分集合を，そして助変数付きモデュライ空間からこの部分集合の原像を取り除くと，助変数空間への射影写像はその微分がフレドホルムであり，そのファイバーはコンパクトである．このことは，射影写像の正則値からなる助変数空間の稠密な開集合が存在することを意味する．摂動方程式の L_4^2-解の L_5^2-ゲージ変換を法としたモデュライ空間は，L_2^2-解の L_3^2-ゲージ変換を法としたモデュライ空間と等しいので，求める稠密な開集合 $U(\widetilde{P}) \subset L_3^2(\Lambda_+^2 T^*X)$ が得られた． □

定理 6.1.1 の証明 各 $Spin^c$-構造 $\widetilde{P}$ に対し，$U^\infty(\widetilde{P})$ を系 6.4.2 の開集合 $U(\widetilde{P}) \subset L_3^2(\Lambda_+^2 T^*X)$ と C^∞-級微分形式全体のなす部分空間との共通部分とする．系 6.4.2 から明らかに，$U^\infty(\widetilde{P})$ は C^∞-級自己双対 2 次微分形式の空間の稠密な開集合であり，$Spin^c$-構造 $\widetilde{P}$ と各 $h \in U^\infty(\widetilde{P})$ に対し定理 6.1.1 の結論は成り立つ．次に，X のすべての $Spin^c$-構造 $\widetilde{P}$ にわたっての $U^\infty(\widetilde{P})$ の共通部分を U^∞ とする．同型を除くと高々可算個の $Spin^c$-構造しか存在しないし，$U^\infty(\widetilde{P})$ は明らかに $Spin^c$-構造 $\widetilde{P}$ の同型類にしか依存しないので，U^∞ は C^∞-級自己双対 2 次微分形式の空間の稠密な G_δ-集合になる．さらに，任意の $h \in U^\infty$ に対し，定理 6.1.1 の結論が成り立つこともまた明らかである． □

6.5 計量と自己双対 2 次微分形式の変分

次に，計量と摂動の生成的道に対する対応する結果も必要とする．

定理 6.5.1 X を滑らかな向き付けられた 4 次元閉多様体とし，$b_2^+(X) > 1$

とする．g_0 と g_1 を X の計量，h_0 と h_1 は生成的自己双対 2 次微分形式で，g_0, h_0 も g_1, h_1 も定理 6.1.1 を満たすと仮定する．$\gamma = \gamma(t)$ を g_0 と g_1 を結ぶ計量の滑らかな道とし，$\eta = \eta(t)$ を h_0 と h_1 を結ぶ L^2_3-自己双対 2 次微分形式の生成的道とする．助変数付きモデュライ空間 $\mathcal{M}(\widetilde{P}, \eta)$ を，方程式

$$F_A^{+_t} = q(\psi) + i\eta(t),$$
$$\partial\!\!\!/_{A,g_t}(\psi) = 0$$

を満たす

$$([A, \psi], t) \in \mathcal{B}(\widetilde{P}) \times [0, 1]$$

の全体と定義する．ここに $+_t$ は g_t に関する自己双対射影を意味し，$\partial\!\!\!/_{A,g_t}$ は g_t に同伴したレビ・チビタ接続と $\mathcal{L}$ の接続 A から構成されるディラク作用素を意味する．このとき $\mathcal{M}(\widetilde{P}, \eta)$ は既約点のみからなり，$\mathcal{B}^*(\widetilde{P}) \times [0, 1]$ の滑らかでコンパクトな境界付き多様体になる．その境界は g_0, h_0 と g_1, h_1 に同伴した 2 つのモデュライ空間の位相和 (disjoint union) である．

証明 $[0, 1]$ から $L^2_3(\Lambda^2_+ T^*X)$ への L^2_1- 写像 η で $\eta(0) = h_0$ と $\eta(1) = h_1$ を満たすもの全体の空間を $\mathcal{P}(h_0, h_1)$ と定義する．任意のこのような道は連続である．この空間はヒルベルト多様体であり，任意の点 η におけるその接空間は $[0, 1]$ から $L^2_3(\Lambda^2_+ T^*X)$ への L^2_1-関数で両端で 0 になるもの全体のなす空間である．写像

$$\mathbf{F} : \mathcal{C}^*_4 \times I \times \mathcal{P} \to L^2_3\left(\Lambda^2_+ T^*X \otimes i\mathbf{R} \oplus S^-(\widetilde{P})\right)$$

を

$$\mathbf{F}(A, \psi, t, \eta) = (F_A^{+_t} - q(\psi) - i\eta(t), \partial\!\!\!/_{A,g_t}(\psi))$$

により定義する．$\mathbf{F}$ が 0 になる任意の点 (A, ψ, t, η) において，微分 $D\mathbf{F}$ は全射であることを主張したい．h_0 と h_1 は生成的に選んであるので，$t = 0$ と $t = 1$ に対してはこのことは自動的に成り立つ．$0 < t < 1$ の場合の解に対しては， 微分の $\mathcal{P}$ の接空間への制限は $L^2_3(\Lambda^2_+ T^*X \otimes i\mathbf{R})$ への全射であることがわかる．このことがわかると，6.2 節と同じ議論により微分の全射性が示さ

れる[訳注 1)]. $\mathbf{M}^*(\widetilde{P})$ を $\mathcal{P}$ で助変数付けられた既約解のモデュライ空間とする．すなわち $\mathbf{M}^*(\widetilde{P})$ を $\mathbf{F}^{-1}(0)$ の $\mathcal{G}_5(\widetilde{P})$ の作用による商空間とする．横断性より $\mathbf{M}^*(\widetilde{P})$ は滑らかな境界付き多様体である．$\mathbf{M}^*(\widetilde{P})$ の $\mathcal{P}$ への射影は滑らかな写像であり，したがってサードの定理より，生成的 $\eta \in \mathcal{P}$ に対し η 上のファイバーは滑らかな境界付き多様体である．このファイバーはちょうど $\mathcal{M}(\widetilde{P},\eta)$ における既約解からなる部分集合である．

仮定 $b_2^+ > 1$ より，摂動方程式が可約解をもつような摂動 h のなす部分集合は，自己双対 2 次微分形式全体のなす空間のなかの余次元が少なくとも 2 の部分多様体なので，自己双対 2 次微分形式の生成的道 η に対し，$\mathcal{M}(\widetilde{P},\eta)$ には可約解は存在しない．よって，生成的 η に対し射影 $\mathcal{M}^*(\widetilde{P}) \to \mathcal{P}$ のファイバーは $\mathcal{M}(\widetilde{P},\eta)$ に等しい．命題 6.4.1 から，各 t に対し $\mathcal{M}(\widetilde{P},\eta(t))$ はコンパクトであり，このことから $\mathcal{M}(\widetilde{P},\eta)$ のコンパクト性が得られる．この時点で，生成的 L_1^2- 道 η に対し助変数付きモデュライ空間 $\mathcal{M}(\widetilde{P},\eta)$ はコンパクトで，固有に埋め込まれた $\mathcal{B}^*(\widetilde{P}) \times I$ の滑らかな部分多様体である．その境界は $\mathcal{M}(\widetilde{P},h_1)$ と $\mathcal{M}(\widetilde{P},h_2)$ の位相和である．モデュライ空間はコンパクトなので，この主張が成り立つような η の全体は L_1^2-道全体の空間の開部分集合をなし，したがって稠密な開部分集合である．よって h_0 と h_1 を結ぶ C^∞-級道の空間に定理の結論を満たすような稠密な G_δ-集合が存在する． □

6.6 モデュライ空間の向き付け可能性

Spin^c-構造のサイバーグ・ウィッテン不変量を定義する前に扱うべき事柄があと一つだけ残されている．それはモデュライ空間の向き付け可能性である．

もし $F : V \to W$ がフレドホルム (線形) 写像とすると，行列式直線 $\det(F)$ を F の核の最高次外積に F の余核の最高次外積の双対空間をテンソルしたものとして定義する．もし $\{F_s\}_{s\in S}$ がフレドホルム作用素の連続的族とすると，ある自然な方法でこれらの行列式直線をつなぎ合わして，助変数空間 S 上の直

訳注 1) 今の場合，$\mathbf{F}$ は既約配位 $\mathcal{C}_4^*$ 上で定義されているので，補題 6.2.1 と同じ議論が適用できる．

線束を作ることができる (例えば [2] の第 5 章の 2.1 節をみよ).

まず基本的補題からはじめよう.

補題 6.6.1 F_s を $s \in S$ で助変数付けられたフレドホルム作用素の連続的族とし，F'_s を F_s とホモトピックな族とする．このとき 2 つの族の間のホモトピーは，これらの族の行列式直線束 $L \to S$ と $L' \to S$ の間の同型を定める．

証明 2 つの族の間のホモトピーは，$S \times I$ 上のフレドホルム作用素の族とみなせる．するとその行列式直線束としての $S \times I$ 上の直線束が得られる．$S \times I$ 上の任意の直線束は，S 上の直線束に I を直積したものと同型である．特にこの直線束を両端 $S \times \{0\}$ と $S \times \{1\}$ に制限したものは正値関数倍を除いて一意的に定まる同型写像により同型である． □

これを $\mathcal{C}(\widetilde{P})$ の点で助変数付けられたフレドホルム作用素の族に適用しよう．各 $(A, \psi) \in \mathcal{C}(\widetilde{P})$ に対し，楕円型複体

$$0 \to L_3^2(X; i\mathbf{R}) \xrightarrow{D_1} L_2^2\Big((T^*X \otimes i\mathbf{R}) \oplus S^+(\widetilde{P})\Big)$$
$$\xrightarrow{D_2} L_1^2\Big((\Lambda_+^2 T^*X \otimes i\mathbf{R}) \oplus S^-(\widetilde{P})\Big) \to 0$$

がある．ただし最初の写像 D_1 は $(2d, -(\cdot)\psi)$ で，2 番目の写像 D_2 は行列

$$\begin{pmatrix} P_+ d & -Dq_\psi \\ \cdot\dfrac{1}{2}\psi & \partial\!\!\!/_A \end{pmatrix}$$

で与えられる．実際のところ，もし (A, ψ) がサイバーグ・ウィッテン方程式の解でないならば $D_2 \circ D_1$ は 0 でないので，この作用素の列は複体になるとは限らない．それにも関わらず，この列からフレドホルム作用素 (D_2, D_1^*)

$$L_2^2\Big((T^*X \otimes i\mathbf{R}) \oplus S^+(\widetilde{P})\Big) \to L_1^2\Big((\Lambda_+^2 T^*X \otimes i\mathbf{R}) \oplus S^-(\widetilde{P}) \oplus i\mathbf{R}\Big)$$

を作ることはできる．この写像 (D_2, D_1^*) を $D_{(A,\psi)}$ で表わす．これは $\mathcal{C}(\widetilde{P})$ の点で助変数付けられたフレドホルム作用素の滑らかな族である．この族をホモトピー

$$D_{(A,\psi)}(t) = (D_2(t), D_1(t)^*)$$

により変形すると便利である．ただし $D_1(t) = 2d - (\cdot)(1-t)\psi$ で，$D_2(t)$ は行列

$$\begin{pmatrix} P_+ d & -(1-t)Dq_\psi \\ \cdot\dfrac{1-t}{2}\psi & \partial\!\!\!/_A \end{pmatrix}$$

である．ここで $E_{(A,\psi)}$ を

$d^+ + \partial\!\!\!/_A + 2d^*$:

$L^2_2\left((T^*X \otimes i\mathbf{R}) \oplus S^+(\widetilde{P})\right) \to L^2_1\left((\Lambda^2_+ T^*X \otimes i\mathbf{R}) \oplus S^-(\widetilde{P})\right) \oplus L^2_1(X; i\mathbf{R})$

とすると，上のホモトピーは $t=0$ における $D_{(A,\psi)}$ と $t=1$ における $E_{(A,\psi)}$ を結ぶものである．

族 $\{E_{(A,\psi)}\}$ の行列式直線束は $\mathcal{C}(\widetilde{P}) \times I$ 上の実直線束である．$\mathcal{C}(\widetilde{P})$ への $\mathcal{G}(\widetilde{P})$ の作用はこの行列式直線束の全空間への作用に自然に拡張する；各ファイバーへの作用は線形である．よって，$\mathcal{C}^*(\widetilde{P}) \times I$ に制限しこの作用で割ることにより，$\mathcal{B}^*(\widetilde{P}) \times I$ 上の行列式直線束 ξ が得られる．

主張 6.6.2 この $\mathcal{B}^*(\widetilde{P}) \times I$ 上の実直線束 ξ は自明な実直線束である．この直線束の向きは

$$\Lambda^{\mathrm{top}} H^1(X; i\mathbf{R}) \otimes (\Lambda^{\mathrm{top}} H^2_+(X; i\mathbf{R}))^{-1} \otimes H^0(X; i\mathbf{R})^{-1}$$

の向きを選ぶと決まる．

証明 この直線束が自明であることを示すには $\mathcal{B}^*(\widetilde{P}) \times \{1\}$ に制限すると自明であることを示せば十分である．$\mathcal{C}^*(\widetilde{P}) \times \{1\}$ 上，上のフレドホルム作用素の族は一定の作用素 $d^+ + 2d^*$ と変化する複素線形作用素 $\partial\!\!\!/_A$ の族との直和に分解する．よってこの部分空間上では，行列式直線束は一定の直線，つまり一定の作用素の族の行列式，と変化する複素線形作用素の族の実行列式直線束とのテンソル積である．$\mathcal{G}(\widetilde{P})$ の作用はこの分解と第 2 因子の複素構造を保つ．よって $\mathcal{G}(\widetilde{P})$ の作用による商は同じ型のテンソル積分解をもつ．任意の複素線形作用素の族の実行列式直線束は自明であり，複素構造から自然に向きが定ま

る．もちろん一定の作用素の族は自明な行列式直線束を定める．これにより，ξ が自明な直線束に同型であることが証明された．

$\mathcal{B}^*(\widetilde{P}) \times I$ は連結なので，ξ に向きを与えるにはかってな 1 点で向きを与えれば十分である．点 $(x,1) \in \mathcal{B}^*(\widetilde{P}) \times \{1\}$ で考察しよう．上の記述から明らかに，$(x,1)$ 上の行列式直線に向きを与えるには一定の族の行列式直線に向きを与えればよい．一定族の核は $H^1(X;i\mathbf{R})$ であり，余核は $H^2_+(X;i\mathbf{R}) \oplus H^0(X;i\mathbf{R})$ である．以上で主張は証明された． □

系 6.6.3 $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ の滑らかな既約点のなす開集合は向き付け可能多様体である．$H^0(X;i\mathbf{R})$, $H^1(X;i\mathbf{R})$ および $H^2_+(X;i\mathbf{R})$ の向きを選べば任意の滑らかな既約点での $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ の向きが定まる．

証明 3 つのコホモロジー群の向きを選べば，$\mathcal{C}^*(\widetilde{P})$ 上のフレドホルム作用素 $D_{(A,\psi)}$ の族の行列式直線束からつくられる $\mathcal{B}^*(\widetilde{P})$ 上の行列式直線束 ξ の向きが定まる．$[A,\psi]$ を滑らかな既約点とする．このとき $D_{(A,\psi)}$ の核は $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ の接空間に等しく，余核は自明である．よって $D_{(A,\psi)}$ の行列式は $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ の $[A,\psi]$ における接空間の最高次外積に自然に同一視される．行列式直線束は向き付け可能なので，$\mathcal{M}(\widetilde{P})$ の滑らかな既約点全体のなす多様体は向き付け可能多様体をなす．系の残りの部分は以前の結果からただちに得られる． □

この議論は摂動方程式にも適用することができ，任意の向き付けられた多様体により助変数付けられた助変数付きモデュライ空間にも適用される．

系 6.6.4 S を滑らかな有限次元向き付け可能多様体とする．各 $s \in S$ に対し g_s を X 上のリーマン計量，h_s を自己双対 2 次微分形式とする．g_s と h_s はどちらも s に関し滑らかに変化すると仮定する．微分形式 ih_s により摂動された計量 g_s に関するサイバーグ・ウィッテン方程式の解 (A,ψ) の同値類と s の組 $([A,\psi],s)$ のなす助変数付きモデュライ空間を $\mathcal{M}(\widetilde{P},S)$ とし，このモデュライ空間は滑らかな多様体であると仮定する．このとき $H^0(X;i\mathbf{R})$, $H^1(X;i\mathbf{R})$, $H^2_+(X;i\mathbf{R})$ および S の向きを選ぶと $\mathcal{M}(\widetilde{P},S)$ の向きが定まる．

向きに関する慣例. $H^1(X;\mathbf{R})$ と $H^2_+(X;\mathbf{R})$ の向きから行列式直線束の向きを定める慣例的方法を述べる．まず第一に，$H^0(X;\mathbf{R})$ には通常の向きが与えられる：コホモロジー類 1 が向きを決める．一定作用素 $d^+ + 2d^*$ の核の向きは，単に $H^1(X;\mathbf{R})$ の向きの i 倍による像として与えられる (この作用素の核は $H^1(X;i\mathbf{R})$ である)．この作用素の余核の向きは，$H^2_+(X;\mathbf{R})$ の向きの i 倍による像と $H^0(X;\mathbf{R})$ の自然な向きの i 倍による像の直和である．

6.7 $b_2^+(X) > 1$ の場合

リーマン多様体 X を固定し，$b_2^+(X) > 1$ と仮定する．X の $Spin^c$-構造 $\widetilde{P} \to X$ を固定する．そして，$H^1(X;\mathbf{R})$ と $H^2_+(X;\mathbf{R})$ の向きを選ぶ．このとき生成的 C^∞ 自己双対 2 次微分形式 h に対し，摂動サイバーグ・ウィッテン方程式の解のモデュライ空間 $\mathcal{M}(\widetilde{P},h)$ は，$\mathcal{B}^*(\widetilde{P})$ のコンパクトで滑らかな部分多様体になる．上のコホモロジー空間の向きがモデュライ空間の向きを定める．

4.5 節で，$\mathcal{B}^*(\widetilde{P})$ 上には自然な S^1-束が存在することをみた：その全空間は，基点をもつゲージ変換群 $\mathcal{G}^0(\widetilde{P})$ の作用による既約配位の同値類全体からなる空間である．$\mu \in H^2(\mathcal{B}^*(\widetilde{P});\mathbf{Z})$ をこの主 S^1-束の第 1 チャーン類とする．このモデュライ空間の次元

$$d(\mathcal{L}) = \frac{c_1(\mathcal{L})^2 - 2\chi(X) - 3\sigma(X)}{4}$$

が偶数，例えば $2d$, のとき，$\widetilde{P}$ の**サイバーグ・ウィッテン不変量**を

$$SW(\widetilde{P}) = \int_{\mathcal{M}(\widetilde{P},h)} \mu^d$$

により定義する．モデュライ空間の次元が奇数のときは，$\widetilde{P}$ のサイバーグ・ウィッテン不変量は 0 と定義する．

注意. $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ の次元は 2 を法として $b_1(X) - b_2^+(X) - 1$ に等しい．よって次元が偶数であるための必要十分条件は $b_1(X) - b_2^+(X)$ が奇数であることである．

補題 6.7.1 $b_2^+(X)>1$ とすると，上の $SW(\widetilde{P})$ の定義は摂動 h の選び方にも X のリーマン計量の選び方にもよらない．

証明 X の 2 つのリーマン計量 g_0, g_1 と 2 つの生成的摂動 h_0, h_1 があったとする．このとき定理 6.5.1 より，g_0 と g_1 を結ぶ生成的道 g_t と，h_0 と h_1 を結ぶ生成的道 η を選ぶと，滑らかな助変数付きモデュライ空間

$$\mathcal{M}(\widetilde{P},\eta) \subset \mathcal{B}^*(\widetilde{P}) \times I$$

が得られる．この助変数付きモデュライ空間は境界をもつ滑らかなコンパクト多様体である．(条件 $b_2^+(X)>1$ は，このモデュライ空間の 1 助変数族が既約解を含まないことを保証するために必要である．) この多様体は，X のコホモロジー空間の向きと I の向きにより向き付けられる．向き付けられた多様体としての境界は $\mathcal{M}(\widetilde{P},h_1)-\mathcal{M}(\widetilde{P},h_2)$ である．よってこれらの向き付けられたモデュライ空間によって代表される $\mathcal{B}^*(\widetilde{P})$ のホモロジー類は同じであり，したがって

$$\int_{\mathcal{M}(\widetilde{P},h_1)} \mu^d = \int_{\mathcal{M}(\widetilde{P},h_2)} \mu^d$$

となる．これは 2 つの $\widetilde{P}$ のサイバーグ・ウィッテン不変量の定義は同じ答を与えることを意味する． □

注意 6.7.2 ここで実際に示したことは，$b_2^+(X)>1$ のとき，$\mathcal{B}^*(\widetilde{P})$ における $\mathcal{M}(\widetilde{P},h)$ のボルディズム類は $\widetilde{P}\to X$ の不変量であるということである．

定理 6.7.3 X を $b_2^+(X)>1$ なる滑らかな向き付けられた 4 次元閉多様体とする．$\mathcal{S}(X)$ を X の $Spin^c$-構造の同値類全体とする．上の定義より矛盾なく定義された (well-defined) 不変量，いわゆるサイバーグ・ウィッテン不変量

$$SW:\ \mathcal{S}(X)\to \mathbf{Z}$$

が導かれる．この関数は $\mathcal{S}(X)$ の有限個の元を除いて 0 を値にとる．

証明 最後の主張を除いてはすべて直前までの議論で証明されたことである．最後の主張は定理 5.2.4 より明らかである． □

6.8 理論における対合写像

さまざまな $Spin^c$-構造に対するサイバーグ・ウィッテン不変量のとる値の間に一般的な関係がある．すなわち $Spin^c$-構造に対する複素共役による対合写像 (involution) があり，1 つの $Spin^c$-構造に対するサイバーグ・ウィッテン不変量の値は，その複素共役に対する値と符号が異なるだけである．

まず複素共役の基本的なことからはじめよう．V を有限次元実ユークリッド空間とすると $Cl(V) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ には自然な複素共役がある．これを

$$c \mapsto \bar{c}$$

で表わす．これは写像 $Spin^c(V) \to Spin^c(V)$ を誘導する．この写像も複素共役とよばれる．この写像は $Spin(V) \subset Spin^c(V)$ の恒等写像を誘導し，行列式には複素共役で作用する．

次に，V の次元は 8 を法として 2 または 4 であると仮定する．この次元を $2d$ で表わす．このとき $Cl(V)$ は $\mathbf{H}$ 上の行列代数に同型である ([7] の 1.4 節をみよ)．この場合，$Cl(V)$ の既約複素加群 $S_{\mathbf{C}}(V)$ は $\mathbf{H}^{2^{d-1}}$ と同一視され，この同一視のもとに，クリフォード代数の作用は左からの四元数行列の作用と，複素構造は右からの複素数の積と同一視される．$Cl(V)$ のクリフォード積とは可換で，右からの複素数の積とは反可換な同型写像 $\iota : S_{\mathbf{C}}(V) \to S_{\mathbf{C}}(V)$ が存在する．この同型は右からの j による四元数積によって与えられる．$c \in Cl(V) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ と $s \in S_{\mathbf{C}}(V)$ に対し

$$\iota(c \cdot s) = \bar{c} \cdot \iota(s)$$

が成り立つ．

次に，$\widetilde{P} \to X$ を向き付けられた 4 次元リーマン多様体 X に対する $Spin^c$-構造とする．このとき $P_{SO(4)}$ を接束の同伴主束とし，P_{S^1} を $\widetilde{P}$ の行列式である主 S^1-束とすると，$\widetilde{P}$ は $P_{SO(4)} \times_X P_{S^1}$ の 2 重被覆である．$P^*_{S^1}$ を P_{S^1} の双対 (または共役) 束とすると，写像

$$(\mathrm{Id}, c) : \ P_{SO(4)} \times_X P^*_{S^1} \to P_{SO(4)} \times_X P_{S^1}$$

が第 1 因子に対しては恒等写像，第 2 因子に対しては共役であるように定義される．2 重被覆を引き戻すことにより $Spin^c$-構造が誘導され，これを $-\widetilde{P}$ によ

り表わす．その行列式は $P^*_{S^1}$ である．もちろん (Id, c) を覆う写像

$$\tilde{c}\colon\ (-\widetilde{P}) \to \widetilde{P}$$

が存在する．$-\widetilde{P}$ には $Spin^c(4)$ が複素共役で作用するとすると，$\tilde{c}$ は $Spin^c(4)$ の作用と両立する主束の写像になる．

$S_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^4)$ をクリフォード代数 $Cl(\mathbf{R}^4)$ 上の既約複素加群とする．このとき主 $Spin^c$-束に対する $\tilde{c}$ の作用，および $S_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^4)$ への j の右作用から誘導される複素スピノル束の写像

$$\iota_{\widetilde{P}}\colon\ (-\widetilde{P}) \times_{Spin^c(4)} S_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^4) \to \widetilde{P} \times_{Spin^c(4)} S_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^4)$$

が存在する．これは $S_{\mathbf{C}}(-\widetilde{P})$ から $S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ への複素反線形同型である．単元 $\omega_{\mathbf{C}}$ は実クリフォード代数に属し，よって $\iota_{\widetilde{P}}$ で保存される．これより，同型 $\iota_{\widetilde{P}}$ は分解を保ち，同型 $\iota^{\pm}_{\widetilde{P}}\colon S^{\pm}_{\mathbf{C}}(-\widetilde{P}) \to S^{\pm}_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ を誘導する．c が $Cl(TX)\otimes\mathbf{C}$ の切断で，ψ が $S_{\mathbf{C}}(-\widetilde{P})$ の切断のとき

$$\iota_{\widetilde{P}}(c\cdot\psi) = \bar{c}\cdot\iota_{\widetilde{P}}(\psi)$$

となることに注意しよう．特に，もし $c \in Cl(TX)$ が実クリフォード代数の元ならば，$\iota_{\widetilde{P}}(c\cdot\psi) = c\cdot\iota_{\widetilde{P}}(\psi)$ となる．

補題 6.8.1 A を $\widetilde{P}$ の行列式 P_{S^1} の接続とし，A^* を $P^*_{S^1}$ の共役接続とする．これらは $\widetilde{P}$ の接続 ∇_A，$-\widetilde{P}$ の接続 ∇_{A^*} を誘導し，よって $S^{\pm}_{\mathbf{C}}(-\widetilde{P})$ および $S^{\pm}_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ のディラク作用素 $\partial\!\!\!/_{A^*}$ および $\partial\!\!\!/_A$ を誘導する．また，$S_{\mathbf{C}}(-\widetilde{P})$ の任意の切断 ψ に対し

$$\iota_{\widetilde{P}}(\partial\!\!\!/_{A^*}(\psi)) = \partial\!\!\!/_A(\iota_{\widetilde{P}}(\psi))$$

が成り立つ．

証明 写像 $\tilde{c}\colon(-\widetilde{P}) \to \widetilde{P}$ により，接続 ∇_A は接続 ∇_{A^*} に引き戻され，写像 $S_{\mathbf{C}}(-\widetilde{P}) \to S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ は実クリフォード代数 $Cl(TX)$ 作用と可換である．このことから補題はただちに従う． □

系 6.8.2 写像 $\iota_{\widetilde{P}}$ は，$S^{\pm}_{\mathbf{C}}(-\widetilde{P})$ の調和切断の空間から $S^{\pm}_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ の調和切断の空間への反線形同型を誘導する．

次にサイバーグ・ウィッテン方程式の曲率に関する部分をみてみよう．もちろん，$F_{A^*}^+ = -F_A^+$ であることは明らかである．一方 $q(\psi)$ と $q(\iota_{\widetilde{P}}(\psi))$ は $S_{\mathbf{C}}^+(-\widetilde{P})$ と $S_{\mathbf{C}}^+(\widetilde{P})$ の自己準同型で，$\iota_{\widetilde{P}}$ により対応する．$F_{A^*}^+$ は純虚数値 2 次微分形式なので，その $S_{\mathbf{C}}^+(-\widetilde{P})$ へのクリフォード積による作用は，$\iota_{\widetilde{P}}$ により $-F_{A^*}^+ = F_A^+$ の $S_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ への作用にうつされる．

定理 6.8.3　配位空間 $\mathcal{C}(\widetilde{P})$ から配位空間 $\mathcal{C}(-\widetilde{P})$ への写像

$$(A, \psi) \mapsto (A^*, \iota_{\widetilde{P}}^{-1}(\psi))$$

は微分同相写像であり，2 つのゲージ群の作用を複素共役で比較するとき，この写像はゲージ群の作用と可換である．よってこれは同相写像 $\mathcal{B}(\widetilde{P}) \to \mathcal{B}(-\widetilde{P})$ を誘導し，既約配位のなす開部分集合上微分同相写像になる．この配位空間の同型はモデュライ空間の同相写像 $\mathcal{M}(\widetilde{P}) \to \mathcal{M}(-\widetilde{P})$ を誘導し，各既約解のザリスキー接空間上では線形同型を与える．さらに，h を自己双対 2 次微分形式とすると，配位空間の同一視は同相写像

$$\mathcal{M}(\widetilde{P}, h) \to \mathcal{M}(-\widetilde{P}, -h)$$

を誘導する．特に一方が滑らかならば他方も滑らかであり，この場合，写像は微分同相写像になる．

以上のことをサイバーグ・ウィッテン不変量 $SW(-\widetilde{P})$ と $SW(\widetilde{P})$ の言葉に翻訳しよう．

系 6.8.4　X を向き付けられた 4 次元閉多様体とし，$b_2^+(X) > 1$ と仮定する．$H^1(X; \mathbf{R})$ と $H_+^2(X; \mathbf{R})$ の向きを固定し，すべてのモデュライ空間の向きが誘導され，任意の $Spin^c$-構造に対するサイバーグ・ウィッテン不変量の符号が決まっているものとする．このとき

$$SW(-\widetilde{P}) = (-1)^{\epsilon(X)} SW(\widetilde{P})$$

が成り立つ．ここに

$$\epsilon(X) = \frac{1 + b_2^+(X) - b_1(X)}{2}$$

である．

証明 対合写像がモデュライ空間に及ぼす影響と，類 μ に及ぼす影響をみさえすればよい．まず第一に，ゲージ群の複素共役は $\mathcal{B}^*(\widetilde{P})$ と $\mathcal{B}^*(-\widetilde{P})$ 上の普遍円周束の間の共役同型を誘導する．よって配位空間の同一視は μ を $-\mu$ にうつす．

次に，$\mathcal{B}^*(\widetilde{P})$ と $\mathcal{B}^*(-\widetilde{P})$ 上の行列式直線束に対する対合写像の影響を調べよう．ホモトピックな族 $(d^+ + 2d^* + \not{\partial}_A)$ の行列式直線束に対する影響を調べれば十分である．対合写像は i を $-i$ にうつすので，群 $H^0(X;i\mathbf{R})$，$H^1(X;i\mathbf{R})$ および $H^2_+(X;i\mathbf{R})$ には -1 倍で作用する．また調和プラス，マイナススピノルには複素反線形同型で作用する．よってこの同型の行列式直線束への全体としての影響，いい替えればモデュライ空間の向きへの影響は $(-1)^\delta$，ただし $\delta = 1 + b_1(X) + b_2^+(X) + \mathrm{ind}_{\mathbf{C}}(\not{\partial}_A)$ である．

$2d$ をモデュライ空間 $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ の形式的次元とする．このとき配位空間の同型は μ^d を $(-\mu)^d$ に送る．

これら 2 つの事実を合わせると，サイバーグ・ウィッテン不変量に対する対合写像の影響は，不変量の値を

$$(-1)^{\delta+d}$$

倍するということになる．もちろん指数定理により

$$d = \frac{b_1(X) - 1 - b_2^+(X)}{2} + \mathrm{ind}_{\mathbf{C}}(\not{\partial})$$

である．これらをすべて合わせると

$$SW(-\widetilde{P}) = (-1)^{\epsilon(X)} SW(\widetilde{P})$$

となる． □

6.9 $b_2^+(X)=1$ の場合

本節では X は向き付けられた滑らかな 4 次元閉多様体で，$b_2^+(X)=1$ とする．$H^1(X;\mathbf{R})$ と $H^2_+(X;\mathbf{R})$ の向きを選ぶ．1 つの例外を除いて，6.7 節とまったく同じ議論を繰り返す．すなわち，サイバーグ・ウィッテン方程式が可約解をもつような計量全体は余次元 1 の部分多様体をなし，これを除かなければな

らない．

補題 6.9.1 $b_2^+(X)=1$ とし，g を X の計量とする．このとき $Spin^c$-構造 $\widetilde{P}$ に対するサイバーグ・ウィッテン方程式が可約解をもつための必要十分条件は，自明でない自己双対調和 2 次微分形式の代表するコホモロジー類が，カップ積に関し $c_1(\mathcal{L})$ に直交することである．

証明 サイバーグ・ウィッテン方程式に対し可約解が存在するための必要十分条件は，$\mathcal{L}$ の ASD 接続が存在することである．このとき，その接続の曲率は g に関し ASD 調和 2 次微分形式である．そのような接続が存在するための必要十分条件は，$c_1(\mathcal{L})$ がカップ積に関し g-自己双対調和 2 次微分形式全体の空間と直交していることである．しかしこの空間は 1 次元である．よって補題が従う． □

さて，0 でない g-自己双対調和 2 次微分形式が $c_1(\mathcal{L})$ に直交していないと仮定しよう．するとサイバーグ・ウィッテン方程式には可約解は存在しない．十分小さい摂動 h に対しても摂動方程式には可約解は存在しない．よって十分小さい生成的 h に対し，モデュライ空間 $\mathcal{M}(\widetilde{P},h)$ はコンパクトで滑らかな多様体である．この多様体は $\mathcal{B}^*(\widetilde{P})$ のサイクルを代表し，もしその次元が偶数 (例えば $2d$) ならば，(X,g) の $\widetilde{P}$ 上のサイバーグ・ウィッテン不変量を

$$SW_g(\widetilde{P})=\int_{\mathcal{M}(\widetilde{P},h)}\mu^d$$

により定義することができる．ただし，$b_2^+(X)>1$ のときと同様，X のコホモロジーの向きからモデュライ空間の向きを定める．容易にわかるように，任意の十分小さい摂動に対しこの積分は同じ結果を与え，$SW_g(\widetilde{P})$ は無矛盾に定義される．

以上の議論から，X の不変量ではなく，計量の自己双対調和 2 次微分形式が $c_1(\mathcal{L})$ に直交していないという性質をもつ計量全体の空間の連結成分の不変量が定義された．次に，少なくとも $H^1(X;\mathbf{Z})=0$ の場合は，不変量の値は，$H^2_+(X;\mathbf{R})$ の向きを与える 0 でない自己双対調和 2 次微分形式と $c_1(\mathcal{L})$ の交点

数の符号のみに依存することをみよう．これは，与えられた $Spin^c$-構造に対するサイバーグ・ウィッテン不変量が，計量によって 2 つの値のみを取りうることを意味する．これらの不変量の差は，理論の最も興味深い一面である．

塀横断公式. ここでは $b_2^+(X)=1$ の場合のみを考える．$Spin^c$-構造 $\widetilde{P}\to X$ を固定しよう．系 6.2.3 より，もし計量の滑らかな 1 助変数族 g_t がその族のなかには可約解をもつものはないという性質をもてば，十分小さい自己双対 2 次微分形式の生成的族 $\eta=\{h_t\}_{0\le t\le 1}$ に対し，助変数付きモデュライ空間 $\mathcal{M}(\widetilde{P},\eta)$ は向き付けられた滑らかな境界付き多様体であり，よって g_0 と g_1 から計算されたサイバーグ・ウィッテン不変量は等しい．もし，族のなかのある g_t に対し，サイバーグ・ウィッテン方程式が可約解をもてば，この議論は適用できない．これは，g_t の自己双対調和 2 次微分形式のなす直線が $c_1(\mathcal{L})$ と交点形式に関し直交しているときにおこる．

各計量に，自己双対調和 2 次微分形式のなす直線を対応させることにより定義される計量全体から $H^2(X;\mathbf{R})$ の 1 次元部分空間全体への写像は，沈め込みである．$H^2_+(X;\mathbf{R})$ の向きを固定しよう．すると各計量 g_t に対し，与えられた向きに関し $H^2_+(X;\mathbf{R})$ の正の成分に属する長さ 1 の g_t-自己双対調和 2 次微分形式が一意的に存在する．この微分形式を $\omega^+(g_t)$ で表わす．

定理 6.9.2 X を向き付けられた 4 次元閉多様体で，

$$H_1(X;\mathbf{Z})=0$$

かつ $b_2^+(X)=1$ とする．$H^2_+(X;\mathbf{R})$ の向きを固定し，$\widetilde{P}$ を $c_1(\mathcal{L})\neq 0$ を満たす X の $Spin^c$-構造とする．$\mathcal{R}$ を X のリーマン計量の空間とする．$\mathcal{R}_+$ を $\omega^+(g)\cdot c_1(\mathcal{L})>0$ なる計量 g の部分集合とし，$\mathcal{R}_-$ を同じ交点数が負になる計量の部分集合とする．このとき各計量 $g\in\mathcal{R}'=\mathcal{R}_+\amalg\mathcal{R}_-$ に対しサイバーグ・ウィッテン不変量 $SW_g(\widetilde{P})$ が定義される．さらに，各 g に対しサイバーグ・ウィッテン不変量 $SW_g(\widetilde{P})$ の値を対応させる $\mathcal{R}'$ 上の関数は，$\mathcal{R}_\pm$ の各々の上で一定であり，$\mathcal{R}_\pm$ 上の共通の値を $SW_\pm(\widetilde{P})$ で表わす．また，モデュライ空間 $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ の形式的次元が非負で偶数のとき，

$$SW_+(\widetilde{P}) = SW_-(\widetilde{P}) - (-1)^d$$

が成り立つ．

本節の残りの部分はこの定理の証明について解説する．まず基本的な補題からはじめよう．

補題 6.9.3 X を向き付けられた4次元閉リーマン多様体とする．$\widetilde{P} \to X$ を $Spin^c$-構造で，$S^+(\widetilde{P})$ の切断を $S^-(\widetilde{P})$ にうつすディラク作用素は非負の指数をもつものとする．$\mathcal{L}$ の任意の接続 A に対し，$a \in \Omega^1(X; i\mathbf{R})$ で次の性質をもつもの全体は $\Omega^1(X; i\mathbf{R})$ の稠密な開集合をなす．その性質とは，

$$D_{A,a}(\psi) = \partial\!\!\!/_A(\psi) + a \cdot \psi$$

で定義される $S^+(\widetilde{P})$ の切断から $S^-(\widetilde{P})$ の切断への作用素 $D_{A,a}$ は全射である，ということである．

証明 補題 6.2.1 の証明の計算から生成的 L^2_2-1 次微分形式 a に対し作用素 $D_{A,a}$ は全射である[訳注 2)]．もちろん $D_{A,a}$ が全射であるような a の部分集合が開集合であることは明らかである． □

さて，X を定理に述べられたようなものとしよう．$H^2_+(X; \mathbf{R})$ の向きを選ぶ．定理 6.9.2 は次の局所的計算と標準的な横断性の議論からの帰結である．

命題 6.9.4 $\{g_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ を X の計量の滑らかな道とし，この族の中で可約解をもつ計量は $g_{1/2}$ のみであり，さらに自己双対2次微分形式 $\omega(g_t)$ と $c_1(\mathcal{L})$ との交点数は $t = 1/2$ において負から正へうつり，0 に横断的な関数を定めると仮定しよう．モデュライ空間 $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ の形式的次元が 0 以上の偶数 $2d$ のとき

$$SW_{g_1}(X) - SW_{g_0}(X) = -(-1)^d$$

が成り立つ．

証明 $H^*(X; \mathbf{R})$ に対する仮定より $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ の形式的次元 $2d$ は $2\mathrm{ind}_{\mathbf{C}}(\partial\!\!\!/_{A_0}) - 2$ に等しい．よってこの次元が 0 以上という仮定は $\mathrm{ind}_{\mathbf{C}}(\partial\!\!\!/_{A_0}) \geq 1$ を意味する．計量の道を γ で表わすと，解のモデュライ空間

訳注 2) この説明だけでは証明は不完全と思われる．後の訳注 4) を参照されたい．

$$\mathcal{M}_\gamma(\widetilde{P}) \subset \mathcal{B}(\widetilde{P}) \times I$$

はコンパクトな特異点付き部分多様体である[訳注 3]．これは 1 つの可約解をもつ．それを $([A_0,0],1/2)$ とする．生成的 $a \in \Omega^1(X;i\mathbf{R})$ を選ぼう．補題 6.9.3 によると

$$D_{A_0,a}(\psi) = \partial\!\!\!/_{A_0}(\psi) + a\cdot\psi$$

で与えられる作用素 $D_{A_0,a}$ の余核は 0 である．

さて，摂動方程式

$$F_A^+ = q(\psi),$$
$$\partial\!\!\!/_A(\psi) + a\cdot\psi = 0$$

のすべての解の摂動モデュライ空間を考えよう．この摂動方程式はもとの方程式と同じ可約解の集合をもつ．a およびその 1 階微分は各点ごとに有界であり $D_{A_0,a}$ は楕円型作用素なので，6.4 節の議論がそのまま適用され，この方程式と計量の族に対する助変数付きモデュライ空間 $\mathcal{M}'(\widetilde{P},\gamma)$ はただ一つの可約解をもつコンパクトモデュライ空間であることがわかる．$D_{A_0,a}$ の余核は自明であり[訳注 4]，t 方向への偏微分は $H_+^2(X;i\mathbf{R})$ への全射を与えるので[訳注 5]，助変数付きモデュライ空間の楕円型複体の 2 次元コホモロジーは，可約解において自明である．よってこの解の近傍は $\mathbf{C}^{d+1}$ を A_0 の固定群の作用で割った商空間に同型である．ゆえに，モデュライ空間におけるこの近傍は複素射影空間上の錐に同相である．

訳注 3) 6.5 節のように，計量の道だけでなく生成的摂動の道も選んで助変数付きモデュライ空間を考えていると理解した方がよい．よって $[\omega(g_t)]\cdot c_1(\mathcal{L}) + \int \omega(g_t)\wedge h_t/2\pi$ が $t=1/2$ で横断的と仮定したほうがよい．以下も同様である．

訳注 4) この全射性がなくても Kronheimer-Mrowka [6] の Proposition 6 の証明の議論を用いて少し修正すればこの命題は証明できる．

訳注 5) $F_A^{+t} = q(\psi) + ih_t$ かつ $t=1/2$ で $\psi=0$ より，$t=1/2$ において

$$\begin{aligned} 0 < (\omega(g_t)\cdot(c_1(\mathcal{L}) + \Pi(h_t/2\pi)))' &= (\omega(g_t)\cdot(\tfrac{i}{2\pi}F_A^{+t} + \Pi(h_t/2\pi)))' \\ &= \omega(g_t)\cdot(\tfrac{i}{2\pi}(F_A^{+t}) + \Pi(h_t/2\pi))' \\ &= \omega(g_t)\cdot(-\tfrac{1}{2\pi}(\mathrm{Im}(F_A^{+t}) - \Pi(h_t))'), \end{aligned}$$

ただし Π は調和射影．以下の主張 6.9.5 の証明も参照せよ．

この近傍の特異点以外のかってな点における向きを計算しよう．作用素

$$(D_{A_0,a}, d^+, d^*):\ \mathcal{C}_3(\widetilde{P}) \times I \to L^2_2(S^-(\widetilde{P}) \oplus \Lambda^2_+ T^*X \otimes i\mathbf{R} \oplus i\mathbf{R})$$

の核は調和スピノルの空間で，複素構造から誘導された向きをもつ．

主張 6.9.5 この作用素の余核は標準的向きをもつ $H^0(X; i\mathbf{R})$ である．

証明 自己双対調和 2 次微分形式 $\omega^+(g_t)$ の道は，$c_1(\mathcal{L})$ に直交する塀を負から正に横断的に横切ることから，交点数

$$\omega(g_t) \cdot c_1(\mathcal{L})$$

は t が増加するとき負から正へ 0 に横断的に横切る実数値関数を定める．このことは $F^{+_t}_{A_0}$ の調和射影が，t が増加するとき，$(2\pi/i)\omega^+(g_t)$ の負数倍から正数倍に変わることを意味する．すなわち $H^2_+(X; i\mathbf{R})$ の与えられた向きにおいて，この交点数の道は t が増加するとき正の側から負の側へ横断的に 0 を横切る．以上により，微分による定義域の接ベクトル ∂_t の像は $H^2_+(X; i\mathbf{R})$ の負の方向を指すことが証明された．次に，この像であるベクトルで，$H^2_+(X; i\mathbf{R}) \oplus H^0(X; i\mathbf{R})$ の向きを割ろう．割るにあたってはこのベクトルを最後におくので，値域の像を法とした商空間の向きは $H^0(X; i\mathbf{R})$ の通常の向きになる．以上により証明は終わる． □

もちろん既約解の固定群，すなわち S^1，の調和スピノルへの作用は通常の複素作用の逆である[訳注 6)]．これより商空間の向きは，複素線形空間を通常の複素作用で割った商空間の自然な向きと逆になる．また，この商空間を複素射影空間上の錐とみたとき，(特異点以外の点で) モデュライ空間の向きは，複素射影空間の複素構造からくる向きと特異点から遠ざかる錐方向への接ベクトルの向きを合わせた向きの逆である．特に，特異点の近傍を切り取ると，残りの部分の多様体の境界は複素構造からくる向きをもった複素射影空間である．もちろん，μ は複素作用からくる S^1-作用により誘導され，したがって，2 次元コホモロジーの通常の生成元の (-1) 倍である．よってこの境界上で μ^d の値をとると $(-1)^d$ である．

訳注 6) 4.4 節参照．これはゲージ群の作用をどう定義するかだけの問題である．

生成的道 $\eta=h(t)\in\Omega_+^2(X;\mathbf{R})$ を選んで，助変数付きモデュライ空間 $\mathcal{M}(\widetilde{P},\eta)$ は可約点以外では滑らかな多様体であるとする．$h(t)$ および $\partial_t h(t)$ が十分小さいとすると，可約点はただ 1 点であり，この点は関数

$$t\mapsto\omega^+(g_t)\cdot(c_1(\mathcal{L})+\Pi(h/2\pi))$$

が 0 に横断的である点である．(ここに Π は自己双対調和形式への L^2-射影を表わす.) さらに，もとの可約解における楕円型複体の 2 次元コホモロジーは自明なので，h が十分小さい限り，摂動方程式に対しても自明である．よって，助変数付きモデュライ空間における可約解の近傍の補集合は，境界をもつ向き付けられたコンパクト多様体である．向き付けられた多様体としてのその境界は

$$\mathcal{M}(\widetilde{P},h_1)-\mathcal{M}(\widetilde{P},h_0)+\mathbf{C}P^d$$

である．よってこの境界上で μ^d の値をとると 0 であり，したがって

$$0=SW_{g_1}(\widetilde{P})-SW_{g_0}(\widetilde{P})+(-1)^d,$$

または同値なことには

$$SW_{g_1}(\widetilde{P})-SW_{g_0}(\widetilde{P})=-(-1)^d$$

となる．これにより命題の証明は終了する． □

上で注意したように定理 6.9.2 は命題 6.9.4 からの簡単な帰結である．

7章

ケーラー曲面の不変量

コンパクトケーラー曲面のサイバーグ・ウィッテン不変量を具体的に計算するために，サイバーグ・ウィッテン方程式を複素幾何の言葉で書き換えることからはじめる．容易にわかるように，このような 4 次元多様体上では，複素幾何の標準的道具を用いて方程式を完全に解くことができる．

7.1　ケーラー多様体上の方程式

本節において，底 4 次元リーマン多様体がコンパクトケーラー多様体のとき，サイバーグ・ウィッテンモデュライ空間を具体的に記述する．3 章でみたように，4 次元リーマン多様体上の直交変換を与える概複素構造 $J : TX \to TX$ は，行列式直線束がその概複素構造の標準束の逆束 K_X^{-1} であるような $Spin^c$-構造 $\widetilde{P}_J \to X$ を誘導する．スピノル束は

$$S^+(\widetilde{P}_J) = \Lambda^0(X;\mathbf{C}) \oplus \Lambda^{0,2}(X;\mathbf{C}),$$
$$S^-(\widetilde{P}_J) = \Lambda^{0,1}(X;\mathbf{C})$$

で与えられる．1 次微分形式 $a \in \Omega^1(X;\mathbf{C})$ によるクリフォード積は $\sqrt{2}\pi^{0,1}(a) \in \Omega^{0,1}(X;\mathbf{C})$ による外積マイナス縮約として表わされた．さらにもしこの概複素構造が実際には複素構造であり，リーマン計量がこの複素構造に対しケーラー

計量ならば，この $Spin^c$-構造と K_X^{-1} の標準的正則エルミート接続に同伴するディラク作用素は，プラススピノルに対し

$$\sqrt{2}(\bar{\partial}+\bar{\partial}^*):\ \Omega^0(X;\mathbf{C})\oplus\Omega^{0,2}(X;\mathbf{C})\to\Omega^{0,1}(X;\mathbf{C})$$

で表わされる．

他の任意の $Spin^c$-構造 $\widetilde{P}$ は $\widetilde{P}_J$ とある $U(1)$-束 $Q\to X$ のテンソル積だけの差がある．$\mathcal{L}_0$ を Q の同伴複素直線束とする．このとき $\widetilde{P}$ のスピノル束は

$$S^+(\widetilde{P})=S^+(\widetilde{P}_J)\otimes\mathcal{L}_0=\Lambda^0(X;\mathcal{L}_0)\oplus\Lambda^{0,2}(X;\mathcal{L}_0),$$
$$S^-(\widetilde{P})=S^-(\widetilde{P}_J)\otimes\mathcal{L}_0=\Lambda^{0,1}(X;\mathcal{L}_0)$$

で与えられる．前と同様に，1 次微分形式 $a\in\Omega^1(X;\mathbf{C})$ によるクリフォード積は，$\sqrt{2}\pi^{0,1}(a)\in\Omega^{0,1}(X;\mathbf{C})$ による外積マイナス縮約として表わされた．さらに $\widetilde{P}$ の行列式直線束は $K_X^{-1}\otimes\mathcal{L}_0^2$ と同一視される．いい替えれば $\mathcal{L}=\det(\widetilde{P})$ とおくとき，$\mathcal{L}_0$ は $K_X\otimes\mathcal{L}$ の 2 乗根である．$\mathcal{L}$ の $U(1)$-接続 A を与えることは $\mathcal{L}_0$ の $U(1)$-接続 A_0 を与えることと同値である．A_{K_X} を K_X の標準的正則エルミート接続とするとき，この同値対応は

$$(A_0)^2=A_{K_X}\otimes A$$

で与えられる．$\mathcal{L}$ の接続 A に同伴するディラク作用素は

$$\sqrt{2}\left(\bar{\partial}_{A_0}+\bar{\partial}^*_{A_0}\right):\ \Omega^0(X;\mathcal{L}_0)\oplus\Omega^{0,2}(X;\mathcal{L}_0)\to\Omega^{0,1}(X;\mathcal{L}_0),$$

すなわち $\sqrt{2}\left(\bar{\partial}+\bar{\partial}^*\right)$ に $\mathcal{L}_0$ の共変微分 ∇_{A_0} を組み合わせて得られる作用素である．この記号は $\bar{\partial}_{A_0}$ が正則構造を定めるということを意味するものではないことに気をつけよう．実際それは一般には正しくない．

この状況で，ディラク方程式の良い記述が与えられる：スピノル場 ψ，すなわち $S^+(\widetilde{P})$ は 2 つの成分

$$\psi=(\alpha,\beta)\in\Omega^0(X;\mathcal{L}_0)\oplus\Omega^{0,2}(X;\mathcal{L}_0)$$

をもち，ディラク方程式は

$$\sqrt{2}\left(\bar{\partial}_{A_0}(\alpha)+\bar{\partial}^*_{A_0}(\beta)\right)=0$$

と表わされる．

次に，曲率方程式をケーラー幾何の言葉で書き表そう．ω をケーラー形式と

する．これはいたるところ 0 でない，自己双対，$(1,1)$-型実 2 次微分形式である．ケーラー多様体上では，複素数値自己双対 2 次微分形式は

$$\Omega^0(X;\mathbf{C})\cdot\omega\oplus(\Omega^{2,0}(X;\mathbf{C})\oplus\Omega^{0,2}(X;\mathbf{C}))$$

と分解される．よって純虚数値自己双対 2 次微分形式は

$$\Omega^0(X;i\mathbf{R})\cdot\omega\oplus\{\mu-\bar{\mu}|\mu\in\Omega^{0,2}(X;\mathbf{C})\}$$

の元である．これより，$\mathcal{L}$ のユニタリ接続 A の曲率の自己双対部分は，X 上のある実数値関数 f とある複素数値 $(0,2)$-型微分形式 μ を用いて

$$F_A^+=if\omega+\mu-\bar{\mu}$$

と表わされる．

このような自己双対 2 次微分形式から誘導される $S^+(\widetilde{P})$ の自己準同型を調べてみよう．1 点を中心とした局所正則座標 (z_1,z_2) を，その点でケーラー計量が 1 次のオーダーまで $\mathbf{C}^n$ の標準的計量と一致するようにとる．$d\bar{z}_1\wedge d\bar{z}_2$ の $S^+(\widetilde{P})$ へのクリフォード積を計算しよう．$d\bar{z}_1$ と $d\bar{z}_2$ は直交しているので，この 2 つの外積に対応するクリフォード代数の元は，単にクリフォード積 $d\bar{z}_1\cdot d\bar{z}_2$ である．同様に，$dz_1\wedge dz_2$ に対応するクリフォード代数の元は，単にクリフォード積 $dz_1\cdot dz_2$ である．$\pi^{0,1}(dz_i)=0$ なので，プラススピノル束に対する $dz_1\wedge dz_2$ の作用は自明である．$d\bar{z}_j$ の $S^+(\widetilde{P})$ への作用を調べよう．もちろん，$\sqrt{2}\pi^{0,1}(d\bar{z}_j)=\sqrt{2}d\bar{z}_j$ である．$d\bar{z}_2$ を外積してから $d\bar{z}_1$ で縮約する作用は $\Omega^0(X;\mathcal{L}_0)$ に自明に作用するので，$d\bar{z}_1\wedge d\bar{z}_2$ の $\Omega^0(X;\mathcal{L}_0)$ への作用は $2d\bar{z}_1\wedge d\bar{z}_2$ を外積する作用に一致する．より一般に，任意の $(0,2)$-形式 μ の $\Omega^0(X;\mathcal{L}_0)$ へのクリフォード積による作用は，単に 2μ を外積する作用で与えられる．同様に，$(0,2)$-形式の $\Omega^{0,2}(X;\mathcal{L}_0)$ へのクリフォード積による作用は，この元の 2 倍による縮約で与えられる．直接計算することにより，μ の $(0,2)$-形式 λ への縮約は $*(\mu\wedge\bar{\lambda})$ であることがわかる．(ここに $*$ はエルミート拡張を用いている；例えば $*(fdvol)=\bar{f}$ である．)

ケーラー形式 ω の作用を考察しよう．ω は与えられた局所座標で

$$\omega=dx_1\wedge dy_1+dx_2\wedge dy_2$$

と表わされる．dx_i と dy_i は直交しているので，この元に対応するクリフォード代数の元は

$$dx_1dy_1 + dx_2dy_2$$

である．(この元は $i(dz_1d\bar{z}_1 + dz_2d\bar{z}_2)/2$ とは等しくないことに注意しよう．dz_1 と $d\bar{z}_1$ とは直交していないからである．) $\Omega^0(X;\mathcal{L}_0)$ へのこの元の作用は，$\frac{i}{\sqrt{2}}(d\bar{z}_1 + d\bar{z}_2)$ を外積してから $\frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{z}_1 + d\bar{z}_2)$ を縮約して -1 倍するものである．直接計算することにより，結果は $-2i$ 倍であることがわかる．$\Omega^{0,2}(X;\mathcal{L}_0)$ へのこの元の作用は，マイナス縮約をしてから外積をするものである．縮約は反線形なので，この合成は $2i$ 倍で与えられる．

これらの計算から，ある実数値関数 f とある複素数値 $(0,2)$-形式 μ に対し

$$F_A^+ = if\omega + \mu - \bar{\mu}$$

とすると，F_A^+ のクリフォード積により誘導される自己準同型は

$$\begin{pmatrix} 2f & *2\left(\mu \wedge \overline{(\cdot)}\right) \\ 2\mu \wedge (\cdot) & -2f \end{pmatrix}$$

と表わされる．一方，$\psi \otimes \psi^*$ の行列表現は

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\bar{\beta} \\ \bar{\alpha}\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix}$$

で与えられる．もちろん $|\psi|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$ である．これより $q(\psi)$ の行列表現は

$$\begin{pmatrix} \dfrac{|\alpha|^2 - |\beta|^2}{2} & \alpha\bar{\beta} \\ \bar{\alpha}\beta & \dfrac{|\beta|^2 - |\alpha|^2}{2} \end{pmatrix}$$

となる．

以上により，曲率方程式は次の方程式に同値である：

$$(F_A^+)^{1,1} = \frac{i}{4}(|\alpha|^2 - |\beta|^2)\omega, \tag{7.1}$$

$$F_A^{0,2} = \frac{\bar{\alpha}\beta}{2}. \tag{7.2}$$

7.2 モデュライ空間の複素解析的記述

複素幾何の言葉で書き下した前節の方程式を解くことにする．連結なケーラー多様体 X と $Spin^c$-構造 $\widetilde{P}$ を固定し，その行列式直線束を $\mathcal{L}$，同伴される $K_X \otimes \mathcal{L}$ の 2 乗根を $\mathcal{L}_0$ としよう．また，$\mathcal{L}$ の**次数**を

$$\deg(\mathcal{L}) = \int_X c_1(\mathcal{L}) \wedge \omega$$

により定義する．

補題 7.2.1 ケーラー曲面 X の $Spin^c$-構造 $\widetilde{P}$ を固定しよう．$\mathcal{L}$ を $\widetilde{P}$ の行列式直線束とし，$\mathcal{L}_0$ を $\widetilde{P}$ から決まる $K_X \otimes \mathcal{L}$ の 2 乗根とする．(A, ψ) を $\widetilde{P}$ に対するサイバーグ・ウィッテン方程式の解とする．前節のように $\psi = (\alpha, \beta)$，ただし $\alpha \in \Omega^0(X; \mathcal{L}_0)$, $\beta \in \Omega^{0,2}(X; \mathcal{L}_0)$ と書き表わそう．このとき，もし $\mathcal{L}$ の次数が ≤ 0 ならば $\beta = 0$ で，もし $\mathcal{L}$ の次数が ≥ 0 ならば $\alpha = 0$ である．さらに A は $\mathcal{L}$ に正則構造を誘導する．$\mathcal{L}_0$ の誘導正則構造に関し，α は正則で，$\bar{\beta}$ は $K_X \otimes \mathcal{L}_0^{-1}$ の正則切断を定める．

証明 $\bar{\alpha}\beta$ は 0 であることの証明からはじめよう．調和スピノル方程式は

$$\sqrt{2}\left(\bar{\partial}_{A_0}(\alpha) + \bar{\partial}^*_{A_0}(\beta)\right) = 0 \tag{7.3}$$

で与えられる．この式に $\sqrt{2}^{-1}\bar{\partial}_{A_0}$ を施すと

$$\bar{\partial}_{A_0}\bar{\partial}_{A_0}(\alpha) + \bar{\partial}_{A_0}\bar{\partial}^*_{A_0}(\beta) = 0 \tag{7.4}$$

となる．もちろん，$\bar{\partial}_{A_0}\bar{\partial}_{A_0}(\alpha) = F^{0,2}_{A_0} \cdot \alpha$ である．A_0 は $\sqrt{K_X \otimes \mathcal{L}}$ の接続であり，この接続は K_X の正則エルミート接続と $\mathcal{L}$ の接続 A のテンソル積の 2 乗根であるので，式 (7.2) より明らかに

$$F^{0,2}_{A_0} = \frac{1}{2}F^{0,2}_A = \frac{1}{4}\bar{\alpha}\beta$$

である．これを式 (7.4) に代入すると

$$\frac{1}{4}|\alpha|^2\beta + \bar{\partial}_{A_0}\bar{\partial}^*_{A_0}(\beta) = 0$$

となる．β と L^2-内積をとり

$$\int_X \frac{1}{2}|\alpha|^2|\beta|^2 dvol + \|\bar{\partial}^*_{A_0}(\beta)\|^2_{L^2} = 0$$

を得る．左辺の 2 つの項は非負なので，どちらも 0 である．もちろん，$|\bar{\alpha}\beta|^2 = |\alpha|^2|\beta|^2$ であり，したがって $\bar{\alpha}\beta = 0$ である．

このことは $F_A^{0,2} = 0$ を意味し，よって A は正則接続である．したがって A_0 も正則接続である．一方上式から $\bar{\partial}^*_{A_0}(\beta) = 0$ も得る．これは β は反正則切断，または同値なことには $\bar{\beta}$ は $\bar{\mathcal{L}}_0 = \mathcal{L}_0^{-1}$ に値をもつ正則 2 次微分形式であることを意味する[訳注 1)]．したがって，式 (7.3) より α は $\mathcal{L}_0$ の正則切断である．特に，X は連結なので，α と β はそれぞれ X の空でない開集合上で 0 ならば，X 全体で恒等的に 0 になる．両者の積は恒等的に 0 なので α と β の一方は恒等的に 0 になる．

あと示すべきことは，$\mathcal{L}$ の次数の符号が α と β のどちらが 0 かを決定するということである．式 (7.1) より

$$(F_A^+)^{1,1} = \frac{i}{4}(|\alpha|^2 - |\beta|^2)\omega$$

である．よってこれから

$$\deg(\mathcal{L}) = \int_X c_1(\mathcal{L}) \wedge \omega = \frac{1}{8\pi}\int_X (|\beta|^2 - |\alpha|^2) dvol$$

となる．α と β のうち少なくとも一方は 0 なので，もし $\mathcal{L}$ の次数が非負ならば α が 0，もし $\mathcal{L}$ の次数が非正ならば β が 0 であることがわかる． □

系 7.2.2 もし $\mathcal{L}$ の次数が非正ならば，サイバーグ・ウィッテン方程式の任意の解は，$\mathcal{L}$ の正則エルミート接続 A と $\mathcal{L}_0$ の正則切断 α の組で

$$(F_A^+)^{1,1} = \frac{i}{4}|\alpha|^2\omega$$

訳注 1) $\bar{\partial}^*_{A_0}(\beta) = 0$ を正規座標と原点で $A_0 = 0$ となる $\mathcal{L}_0$ の標構を用いて書き下すと，$\beta = \beta_0 d\bar{z}^1 \wedge d\bar{z}^2$ とおくとき $-\frac{\partial \beta_0}{\partial z^1} d\bar{z}^2 + \frac{\partial \beta_0}{\partial z^2} d\bar{z}^1 = 0$．よって β は反正則．

を満たすものからなる．このような2つの組 (A,α) と (A',α') がモデュライ空間の同じ点を定めるための必要十分条件は，正則直線束 $\mathcal{L}_A$ と $\mathcal{L}_{A'}$ の間に正則なエルミート同型が存在し，$\mathcal{L}_0$ から $\mathcal{L}_0$ への誘導正則同型により α が α' にうつされることである．

証明 補題 7.2.1 より，系に述べられた (A,α) に関する条件は，この組がサイバーグ・ウィッテン方程式の解を与えること，および $\mathcal{L}$ の次数が非正のときは任意の解はこのようにして得られることと同値である．一意性に関する主張は明らかである． □

$\mathcal{L}$ の次数が非負のときも同様の結果がある．この場合を扱うには2つの方法がある．一つは類似の議論を直接適用する方法である．もう一つは，6.8 節で述べたような直線束を逆にすることによる $Spin^c$-構造の対合写像を用いる方法である．この対合写像を考えよう．これは $\mathcal{L}$ をその逆束にうつすので $\mathcal{L}_0$ を $K_X \otimes \mathcal{L}_0^{-1}$ にうつす．さて一般論より $S^+_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^4)$ は $\mathbf{H}$ と同一視されるのであった．また 2.1 節の例 (iii) と (iv) を用いて，$\mathbf{C}$, $j\mathbf{C} \subset \mathbf{H}$ が $\Lambda^0(X;\mathcal{L}_0)$, $\Lambda^{0,2}(X;\mathcal{L}_0) \subset S^+_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ に対応することを示すことができる．よって $S^+_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^4)$ への j の右からの積は，$S^+_{\mathbf{C}}(\widetilde{P})$ から $S^+_{\mathbf{C}}(-\widetilde{P})$ への束同型 $(\alpha,\beta) \mapsto (-\bar{\beta},\bar{\alpha})$ を誘導する．これを用いると，系 7.2.2 から次の結果が得られる．

系 7.2.3 もし $\mathcal{L}$ の次数が非負ならば，サイバーグ・ウィッテン方程式の解は，$\mathcal{L}$ の正則エルミート接続 A と $K_X \otimes \mathcal{L}_0^{-1}$ の正則切断 $\bar{\beta}$ の組で

$$(F_A^+)^{1,1} = -\frac{i}{4}|\beta|^2\omega$$

を満たすものからなる．このような2つの組 (A,β) と (A',β') がモデュライ空間の同じ点を定めるための必要十分条件は，正則直線束 $\mathcal{L}_A$ と $\mathcal{L}_{A'}$ の間に正則なエルミート同型が存在し，$K_X \otimes \mathcal{L}_0^{-1}$ から $K_X \otimes \mathcal{L}_0^{-1}$ への誘導正則同型により $\bar{\beta}$ が $\bar{\beta}'$ にうつされることである．

あと残されていることは，曲率方程式を用いて，$\mathcal{L}$ の次数が負のとき $\mathcal{L}$ の正則構造と $\mathcal{L}_0$ の正則切断 α はモデュライ空間の点を定めることを示すことで

ある.

補題 7.2.4 $\mathcal{L}$ の次数は負とする．A を $\mathcal{L}$ の正則エルミート接続とし，α は $\mathcal{L}_0$ の (A_0 から定まる正則構造に関する) 0 でない正則切断とする．このとき $\mathcal{L}$ のもう一つのエルミート構造 h' で，h' に関しエルミートで A と同じ $\mathcal{L}$ の正則構造を定める接続 A' に対し

$$F_{A'}^{1,1} = \frac{i}{4}(|\alpha|_{h'})^2\omega \tag{7.5}$$

となるものが存在する．ここに $(|\alpha|_{h'})^2$ は h' から定まる $\mathcal{L}_0$ のエルミート構造に関して計ったノルムの 2 乗である．

証明 $\mathcal{L}$ の与えられたエルミート内積を h とする．$\mathcal{L}$ の新しいエルミート構造 h' をある滑らかな実数値関数 λ を用いて $\exp(\lambda)h$ と表わす．もちろん $(|\alpha|_{h'})^2 = \exp(\lambda)|\alpha|^2$ である．h' に関しエルミートな正則接続 A' の曲率は

$$F_{A'} = F_A + \bar{\partial}\partial(\lambda)$$

で与えられる．よって，λ に関して解くべき方程式は

$$F_A^+ + (\bar{\partial}\partial(\lambda))^+ = \frac{i}{4}\exp(\lambda)|\alpha|^2\omega$$

であり，またこの方程式は

$$F_A \wedge \omega + \bar{\partial}\partial(\lambda) \wedge \omega = \frac{i}{4}\exp(\lambda)|\alpha|^2\omega \wedge \omega \tag{7.6}$$

とも同値である．もちろん，計量はケーラーなので

$$\bar{\partial}\partial\lambda \wedge \omega = \frac{2}{i}\left(-\frac{\partial^2\lambda}{\partial z_1\bar{\partial}z_1} - \frac{\partial^2\lambda}{\partial z_2\bar{\partial}z_2}\right)dvol = \frac{2}{i}\Delta(\lambda)dvol$$

である．また，$\mathcal{L}$ の次数は負なので，

$$\int_X (iF_A \wedge \omega) < 0$$

である．よって方程式 (7.6) は $Cdvol = \frac{i}{2}(F_A \wedge \omega)$ となる滑らかな関数 C を用いて

$$\Delta(\lambda) + \frac{|\alpha|^2}{4}\exp(\lambda) + C = 0$$

と書き換えることができる．$\mathcal{L}$ の次数に関する条件から

$$\int_X C dvol < 0$$

である．

[5] によれば，このような方程式は一意的な解 $\lambda : X \to \mathbf{R}$ をもつ． □

$\mathcal{L}$ の任意の 2 つのエルミート構造は $\mathcal{L}$ の複素線形自己同型により同型である．これよりモデュライ空間の最終的記述が得られる．

系 7.2.5　$\widetilde{P}$ をケーラー曲面 X の $Spin^c$-構造とする．行列式 $\mathcal{L}$ の次数は負であると仮定する．$\mathcal{L}$ の正則構造 $\bar{\partial}_{\mathcal{L}}$ と $\mathcal{L}_0 = \sqrt{K_X \otimes \mathcal{L}}$ の 0 でない正則切断 α_0 の組 $(\bar{\partial}_{\mathcal{L}}, \alpha_0)$ を固定する．このとき系 7.2.2 のようなサイバーグ・ウィッテン方程式の解 (A, α) で次の性質を満たすものが存在する：

- A は正則構造 $\bar{\partial}_{\mathcal{L}}$ と同型な $\mathcal{L}$ の正則構造を定める．そして，
- A の定める正則構造から $\bar{\partial}_{\mathcal{L}}$ への正則同型で，α を α_0 に送るものが存在する．

このような解 (A, α) はゲージ同値を除いて一意的である．上のような任意の組 $(\bar{\partial}_{\mathcal{L}}, \alpha_0)$ はモデュライ空間 $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ の点を定め，逆に $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ の任意の点はこのようにして得られる．2 つの組 $(\bar{\partial}_{\mathcal{L}}, \alpha_0)$ と $(\bar{\partial}'_{\mathcal{L}}, \alpha'_0)$ が $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ の同じ点を定めるための必要十分条件は，$\mathcal{L}$ の正則構造は同型で，$\mathcal{L}_0$ の誘導正則同型が正則切断を互いの定数倍にうつすことである．

証明　$\mathcal{L}$ の与えられたエルミート計量を h で表わそう．系に述べられたような組を $(\bar{\partial}_{\mathcal{L}}, \alpha_0)$ とする．補題 7.2.4 より $\mathcal{L}$ のエルミート計量 h' で，正則構造 $\bar{\partial}_{\mathcal{L}}$ を誘導する h'-エルミート接続を A' とするとき

$$F^+_{A'} = \frac{i}{4}(|\alpha_0|_{h'})^2\omega$$

を満たすものが存在する．$\rho: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ を $\rho^*(h') = h$ を満たす C^∞ 複素線形同型とし，$A = \rho^*(A')$ とする．このとき A は，正則構造 $\bar\partial_{\mathcal{L}}$ と同型な $\mathcal{L}$ の正則構造を誘導する h-エルミート接続である．明らかに，$\alpha = \rho^{-1}(\alpha_0)$ は $\mathcal{L}_0$ の正則切断で

$$F_A^+ = \frac{i}{4}|\alpha|^2\omega$$

を満たす．以上により，系の最初の主張が証明された．

次に上で得られた解 (A, α) がゲージ同値を除いて一意的であることを証明しよう．ポイントは計量を拡大する λ 自体が一意的であるということである．これは前段落の同型 ρ が S^1-ゲージ変換を除いて一意的であるということである．このことから (A, α) のゲージ変換を除いた一意性は明らかである．

もし α を 0 でない複素定数倍 $\lambda_0\alpha$ で置き換えると，$\lambda_0\alpha$ から得られるサイバーグ・ウィッテン方程式の解は α から得られる解にゲージ同値であることに注意しよう．

補題 7.2.1 から，サイバーグ・ウィッテン方程式の任意の解はこのようにして得られる．

最後に，系に述べられたような 2 つの組 $(\bar\partial_{\mathcal{L}}, \alpha_0)$ と $(\bar\partial'_{\mathcal{L}}, \alpha'_0)$ はいつサイバーグ・ウィッテン方程式のゲージ同値な解を定めるかをみる必要がある．もしこれらがゲージ同値な解を定めるならば，正則構造 $\bar\partial_{\mathcal{L}}$ と $\bar\partial'_{\mathcal{L}}$ は同型である．よって $\bar\partial_{\mathcal{L}} = \bar\partial'_{\mathcal{L}}$ と仮定してよい．もし 2 つの組がサイバーグ・ウィッテン方程式のゲージ同値な解を定めるならば，$\bar\partial_{\mathcal{L}}$ の正則同型で α_0 を α'_0 に送るものが存在する．しかし正則直線束の正則同型は複素定数倍しかない．これにより証明は終わる．　□

$\mathcal{L}$ の次数が正のときもまったく同様の結果が成り立つ．

系 7.2.6　$\widetilde{P}$ をケーラー曲面 X の $Spin^c$-構造とする．行列式 $\mathcal{L}$ の次数は正であると仮定する．$\mathcal{L}$ の正則構造 $\bar\partial_{\mathcal{L}}$ と $K_X \otimes \mathcal{L}_0^{-1} = \sqrt{K_X \otimes \mathcal{L}^{-1}}$ の 0 でない正則切断 $\bar\beta_0$ とし，組 $(\bar\partial_{\mathcal{L}}, \beta_0)$ を固定する．このとき系 7.2.3 のようなサイバーグ・ウィッテン方程式の解 (A, β) で次の性質を満たすものが存在する：

- A は正則構造 $\bar{\partial}_{\mathcal{L}}$ と同型な $\mathcal{L}$ の正則構造を定める．そして，
- A の定める正則構造から $\bar{\partial}_{\mathcal{L}}$ への正則同型で，β を β_0 に送るものが存在する．

このような解 (A,β) はゲージ同値を除いて一意的である．上のような任意の組 $(\bar{\partial}_{\mathcal{L}},\beta_0)$ はモデュライ空間 $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ の点を定め，逆に $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ の任意の点はこのようにして得られる．2 つの組 $(\bar{\partial}_{\mathcal{L}},\beta_0)$ と $(\bar{\partial}'_{\mathcal{L}},\beta'_0)$ が $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ の同じ点を定めるための必要十分条件は，$\mathcal{L}$ の正則構造は同型で，$\mathcal{L}_0$ の誘導正則同型が正則切断を互いの定数倍にうつすことである．

最後に，$\mathcal{L}$ の次数が 0 のときを考察しよう．$\mathcal{L}$ の次数は非正でもあり非負でもあるのでスピノル場 (α,β) は恒等的に 0 である．このことから次の結果が得られる．

系 7.2.7 $\widetilde{P}$ をケーラー曲面 X の $Spin^c$-構造とする．もし $\widetilde{P}$ の行列式直線束 $\mathcal{L}$ の次数が 0 ならば，サイバーグ・ウィッテン方程式の任意の解は $\mathcal{L}$ の反自己双対接続 A と自明なスピノル場からなる．これによりモデュライ空間 $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ は $\mathcal{L}$ の反自己双対接続のゲージ同値類の全体と同一視される．

7.3 ケーラー曲面に対する値

まず，X がケーラー多様体のとき，$H^2_+(X;\mathbf{R})$ と $H^1(X;\mathbf{R})$ に与える向きについて説明しよう．(これらの向きはサイバーグ・ウィッテン不変量に符号をつけるのに必要であったことを思い出そう．) $H^{0,1}(X;\mathbf{C})$ にはその複素構造から誘導される向きが入っているとし，$H^1(X;\mathbf{R})$ から $H^{0,1}(X;\mathbf{C})$ への射影が向きを保つ同型写像であるように $H^1(X;\mathbf{R})$ に向きを入れる．$H^2_+(X;\mathbf{R})$ はケーラー類の実数倍全体 $\mathbf{R}\omega$ と $(H^{2,0}(X;\mathbf{C})\oplus H^{0,2}(X;\mathbf{C}))\cap H^2(X;\mathbf{R})$ との直和に直交分解する．$\mathbf{R}\omega$ は ω が正の部分空間に属するように向き付ける．さらに，その直交補空間は $H^{0,2}(X;\mathbf{C})$ への射影が向きを保つ同型写像であるように向き付ける ($H^{0,2}(X;\mathbf{C})$ には複素構造から誘導される向きが入っているとする)．

これにより $H^2_+(X;\mathbf{R})$ が向き付けられた．以後ケーラー曲面上でサイバーグ・ウィッテン不変量について議論するとき，これらの向きを使うことを暗黙の約束とする．

命題 7.3.1 X をケーラー計量の与えられたケーラー曲面とする．このとき，

- もし K_X の次数が負ならばサイバーグ・ウィッテン方程式は可約解しかもたない．
- $\widetilde{P}_X$ を複素構造から決まる $Spin^c$-構造とする．もし K_X の次数が正ならば，与えられたケーラー計量に関するサイバーグ・ウィッテン不変量 $SW(\widetilde{P}_X)$ は 1 に等しい．

証明 ケーラー形式に関し，K_X が負の次数をもつ場合を最初に考えよう．$Spin^c$-構造 $\widetilde{P}$ を固定する．$\widetilde{P}$ の行列式直線束 $\mathcal{L}$ の次数が非正の場合をまず考察する．補題 7.2.1 によれば，この場合 $\beta=0$ で α は $\mathcal{L}_0$ の正則切断である．もし $\alpha\neq 0$ ならば $\mathcal{L}_0$ の次数は ≥ 0 である．しかし $\mathcal{L}_0^2=K_X\otimes\mathcal{L}$ は明らかに負の次数をもつのでこれは矛盾である．したがってこの場合 $\alpha=0$ でもあり，解は可約である．

もし $\mathcal{L}$ の次数が非負ならば，補題 7.2.1 により $\alpha=0$ で $\bar{\beta}$ は $K_X\otimes\mathcal{L}_0^{-1}$ の正則切断である．もし $\beta\neq 0$ であるとすると，この直線束は非負次数をもつ．しかしこの束は $K_X\otimes\mathcal{L}^{-1}$ の 2 乗根であり，負の次数をもつ．これは矛盾であるから $\beta=0$ であり，この場合もサイバーグ・ウィッテン方程式は可約解のみをもつ．これにより命題の主張の第 1 項目の証明が終わる．

今度は K_X の次数は正で，考える $Spin^c$-構造 $\widetilde{P}_X$ は複素構造から誘導されるものと仮定しよう．もちろん行列式直線束 $\mathcal{L}$ は K_X^{-1} に等しく，したがって負の次数をもつ．これは，$\mathcal{L}_0$ が C^∞ 複素直線束として自明であるような $Spin^c$-構造である．$\widetilde{P}_X$ に対するサイバーグ・ウィッテン方程式の解 (A,α) があったとしよう．A_0 から誘導される $\mathcal{L}_0$ の正則構造は自明でない正則切断 α をもつ．$\mathcal{L}_0$ は位相的に自明な束なので，この正則切断はいたるところ 0 でなく，よって一定値切断である．これによりモデュライ空間 $\mathcal{M}(\widetilde{P}_X)$ は 1 点であることが証明された．

次に，解 (A, α) に同伴された楕円型複体の微分を計算することにより，この点が正則点であることを示そう．

複体は

$$0 \to \Omega^0(X; i\mathbf{R}) \xrightarrow{D_1} \begin{matrix} \Omega^1(X; i\mathbf{R}) \\ \oplus \\ \Omega^0(X; \mathbf{C}) \oplus \Omega^{0,2}(X; \mathbf{C}) \end{matrix} \xrightarrow{D_2} \begin{matrix} \Omega^2_+(X; i\mathbf{R}) \\ \oplus \\ \Omega^{0,1}(X; \mathbf{C}) \end{matrix} \to 0, \tag{7.7}$$

ただし

$$D_1(if) = \begin{pmatrix} 2idf \\ -if \cdot \alpha \end{pmatrix},$$

$$D_2\begin{pmatrix} i\lambda \\ (a, b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_+ d(i\lambda) - (i\mathrm{Re}(a\bar{\alpha})/2)\omega + (\alpha\bar{b} - \bar{\alpha}b)/2 \\ \sqrt{2}\bar{\partial}(a) + \sqrt{2}\bar{\partial}^*(b) + \pi^{0,1}(i\lambda) \cdot \alpha/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

である．α は 0 でない一定値切断なので，D_1 の核は自明であることは明らかである．

次に D_2 の核を考察しよう．

$$D_2\begin{pmatrix} i\lambda \\ (a, b) \end{pmatrix} = 0$$

としよう．$D_2\begin{pmatrix} i\lambda \\ (a, b) \end{pmatrix}$ の第 2 座標に $\bar{\partial}$ を施し，$\bar{\partial} \circ \bar{\partial} = 0$ かつ $\bar{\partial}\alpha = 0$ であることを使うと，

$$\frac{1}{2}\bar{\partial}(\pi^{0,1}(i\lambda)) \cdot \alpha + \bar{\partial}\bar{\partial}^*(b) = 0$$

を得る．また，

$$\bar{\partial}(\pi^{0,1}(i\lambda)) = d(i\lambda)^{0,2} = \frac{\bar{\alpha}b}{2}$$

でもある (2 番目の等式は $D_2\begin{pmatrix} i\lambda \\ (a, b) \end{pmatrix}$ の第 1 座標が 0 であることからくる)．これを代入して

$$\frac{1}{4}|\alpha|^2 b + \bar{\partial}\bar{\partial}^* b = 0$$

を得る．b と L^2-内積をとると

$$\frac{1}{4}\|\bar{\alpha}b\|_{L^2}^2 + \|\bar{\partial}^*(b)\|_{L^2}^2 = 0$$

となり，よって $\bar{\alpha}b = 0$，したがって $b = 0$ となる．

ある $\xi \in \Omega^{0,1}(X; \mathbf{C})$ を用いて $i\lambda = \bar{\xi} - \xi$ と書こう．このとき D_2 の核に属するという式は

$$\sqrt{2}\bar{\partial}a + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\xi} \cdot \alpha = 0, \tag{7.8}$$

$$P_+(\partial\bar{\xi} - \bar{\partial}\xi) = \frac{i}{2}\mathrm{Re}(a\bar{\alpha})\omega \tag{7.9}$$

となる．

実数値関数 u と v を用いて $a = (u+iv)\alpha$ と書こう．$D_1(iv)$ を $(i\lambda, a, b)$ に加えて，実数値関数 u に対し $a = u\alpha$ であるように調整する．このとき式 (7.8) は

$$\sqrt{2}\bar{\partial}u \cdot \alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\xi} \cdot \alpha = 0$$

となり．これより

$$\bar{\xi} = -2\bar{\partial}u$$

を得る．これを使うと式 (7.9) は

$$8\Delta(u) + |\alpha|^2 u = 0$$

と同値である．u との L^2-内積をとって $u = 0$ を得る．これより $i\lambda = 0$ および $a = 0$ が結論づけられる．

以上により D_2 の核の任意の元は D_1 の像に属すること，したがって，楕円型複体の 1 次元コホモロジーは自明であることが証明された．

最後に，楕円型複体の 2 次元コホモロジーを計算する必要がある．しかし複体の指数は

$$\frac{K_X^2 - (2\chi(X) + 3\sigma(X))}{4}$$

であることはわかっている．X はケーラー多様体なのでこの指数は 0 である．また，$H^0 = H^1 = 0$ なので 2 次元コホモロジーも 0 である．これにより方程式の一意解がモデュライ空間の正則点を定めること，よって $Spin^c$-構造 $\widetilde{P}_X$ のサイバーグ・ウィッテン不変量が ± 1 であることが証明された．

次に符号を決定したい．作用素を

$$D_1 = \overline{D_1} + E_1 = 2d + E_1$$

と

$$D_2 = \overline{D_2} + E_2 = (P_+ d + \partial\!\!\!/_A) + E_2$$

に分解する．ここで，E_1 と E_2 は 0 次の作用素である．D_i の代わりに $\overline{D_i}$ を用いたときの楕円型複体の調和形式の空間を $\mathcal{H}^i$，その L^2-直交補空間を $(\mathcal{H}^i)^\perp$ とし，楕円型複体の空間を $\mathcal{H}^i$ と $(\mathcal{H}^i)^\perp$ に分解する．容易にわかるように，作用素 E_i はこの分解を保つ．構成の仕方から，楕円型複体の行列式直線束の向きは，$H^i(X;\mathbf{R})$ に与えられた向きと，調和スピノルの空間の複素構造から誘導される向きとから誘導される $\mathcal{H}^i$ の向きによって与えられる．解における行列式直線束の符号を計算するには，次の有限複体

$$0 \to H^0(X; i\mathbf{R}) \xrightarrow{E_1} \begin{matrix} H^1(X; i\mathbf{R}) \\ \oplus \\ H^0(X;\mathbf{C}) \oplus H^{0,2}(X;\mathbf{C}) \end{matrix} \xrightarrow{E_2} \begin{matrix} H^2_+(X; i\mathbf{R}) \\ \oplus \\ H^{0,1}(X;\mathbf{C}) \end{matrix} \to 0$$

の行列式直線束の符号を，複素コホモロジー群には複素構造から誘導される向きが，$i\mathbf{R}$-係数コホモロジー群には選んである向きが与えられているとき考察すればよい．これらの向きに関し，E_2 により誘導される写像 $H^1(X; i\mathbf{R}) \to H^{0,1}(X;\mathbf{C})$ は向きを保つ同型である．同様に E_2 により誘導される写像 $H^{0,2}(X;\mathbf{C}) \to H^2_+(X; i\mathbf{R})$ はケーラー類の純虚数倍の張る 1 次元部分空間の直交補空間への向きを保つ同型になる．これらの同型の剰余をとって残るのは

$$0 \to i\mathbf{R} \to \mathbf{C} \to i\mathbf{R} \to 0$$

である．ここに最初の写像は包含写像のマイナスで，2 番目の写像は実部の $\frac{i}{2}$ 倍である．明らかに，与えられた向きに関しこの完全複体の行列式の符号は $+1$ である．これにより $SW(\widetilde{P}_X) = +1$ が証明された． □

7.4 ケーラー曲面に対する計算

定理 7.4.1 X を一般型の極小代数曲面とする．このとき任意のケーラー計量に対し

$$SW(\widetilde{P}) = \begin{cases} 1 & (\widetilde{P} \cong \widetilde{P}_X \text{ のとき}) \\ (-1)^{1+p_g(X)-q(X)} & (\widetilde{P} \cong -\widetilde{P}_X \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{上の場合以外のとき}). \end{cases}$$

証明 一般型の極小曲面は，$K_X^2 > 0$ であることと K_X が数値的に効果的であること，すなわち任意の効果的因子 $D \subset X$ に対し $K_X \cdot D > 0$ であること，で特徴づけられる．ω を X のあるケーラー計量に対するケーラー形式とする．数値的に効果的であるという条件から $K_X \cdot \omega \geq 0$ である．もし $K_X \cdot \omega = 0$ ならば，ホッジ指数定理より $K_X^2 \leq 0$ である．これはありえないので K_X の ω に関する次数は正である．よって，$SW(\widetilde{P}_X)$ に対する値は命題 7.3.1 からただちに得られる．$SW(-\widetilde{P}_X)$ に対する値は系 6.8.4 からの帰結である．

SW が 0 でないのはこの 2 つの $Spin^c$-構造のみであることを示そう．$\widetilde{P}$ を形式的次元が非負の $Spin^c$-構造としよう．このことは，その行列式直線束 $\mathcal{L}$ が $c_1(\mathcal{L})^2 \geq K_X^2 > 0$ を満たすことを意味する．特に $c_1(\mathcal{L})^+$ は捩れ類ではない．このことは，可約解はないこと，そして $\mathcal{L}$ の次数は 0 ではないことを意味する．対合写像による対称性から $\mathcal{L}$ の次数は負であると仮定してよい．もし $SW(\widetilde{P}) \neq 0$ ならば $\widetilde{P} \cong \widetilde{P}_X$ であることを示したい．もちろん $SW(\widetilde{P}) \neq 0$ ならば $\widetilde{P}$ に対するサイバーグ・ウィッテン方程式の解は存在する．

解の存在は，$\mathcal{L}$ の正則構造の存在，および $\mathcal{L}_0 = \sqrt{K_X \otimes \mathcal{L}}$ が 0 でない正則切断をもつことを意味する．$L = c_1(\mathcal{L})$ とおこう．数値的に効果的であるという判定条件と $\mathcal{L}_0$ が非自明正則切断をもつということを援用して，$K_X \cdot (K_X + L)/2 \geq 0$ を得る．K_X は正の次数，$\mathcal{L}$ は負の次数をもつので

$$\omega \cdot (K_X + tL) = 0$$

となる $t \geq 0$ が存在する．ホッジ指数定理によりこれは

$$0 \geq (K_X + tL)^2 = K_X^2 + 2tK_X \cdot L + t^2 L^2$$

を意味する．この t の 2 次関数は，$t = -(K_X \cdot L)/L^2$ で最小値

$$K_X^2 - \frac{(K_X \cdot L)^2}{L^2}$$

をとる[訳注 2)]．$L^2 \geq K_X^2 \geq -K_X \cdot L > 0$ であるから，この値は非負であり，したがって 0 である．このことは上式で表現される t の関数が非正の値をとりうるのは $t = 1$ のみであることを意味する．よって $(K_X + L)^2 = 0$ かつ $\omega \cdot (K_X + L) = 0$ である．ホッジ指数定理により，これらの 2 つの式は $K_X + L$ が捩れ類であること，同値なことには $c_1(\mathcal{L}_0)$ が捩れ類であること，を意味する．$\mathcal{L}_0$ は自明でない正則切断をもつので，これは $\mathcal{L}_0$ が正則直線束として自明であること，よって問題としている $Spin^c$-構造は $\widetilde{P}_X$ であること，を意味する． □

系 7.4.2 X を一般型の極小代数曲面とするとサイバーグ・ウィッテン関数はケーラー計量の選び方に依存しない．

もちろんこれは $b_2^+(X) = 1$ のときにのみ新しい結果である．

さらに，ケーラー曲面の微分位相幾何に対する直接的結果として次を得る．

系 7.4.3 X と Y を一般型極小ケーラー曲面とし，$f : X \to Y$ を向きを保つ微分同相写像とする．このとき $f^*(K_Y) = \pm K_X$ が成り立つ．

今度は X が楕円曲面の場合を考察しよう．

訳注 2) $K_X^2 > 0$，$L^2 > 0$ なので，この 2 次式が $t \geq 0$ に対し 0 となるには $-K_X \cdot L > 0$ でなければならない．

定理 7.4.4　X を極小楕円曲面で，K_X は捩れ類ではないものと仮定しよう．このとき

$$SW(\widetilde{P}_X) = 1,$$
$$SW(-\widetilde{P}_X) = (-1)^{1+p_g(X)-q(X)}$$

が成り立つ．さらに，もし $\widetilde{P}$ が $SW(\widetilde{P}) \neq 0$ となる X の $Spin^c$-構造であるとすると，有理コホモロジーにおける $c_1(\mathcal{L})$ の像は K_X の像の有理数倍であり，しかもその倍数は 1 と -1 の間にある．もしその倍数が ± 1 ならば，その $Spin^c$-構造は $\pm\widetilde{P}_X$ である．

証明　この定理に述べられているような曲面すべてに対し，K_X は数値的に効果的であり $K_X^2 = 0$ である．よって K_X の数値的効果性により $K_X \cdot \omega \geq 0$ である．K_X は捩れ類ではないと仮定しているので，ホッジ指数定理から $K_X \cdot \omega \neq 0$ である．よって K_X は正の次数をもち，$SW(\widetilde{P}_X)$ と $SW(-\widetilde{P}_X)$ の計算は系 7.3.1 と系 6.8.4 から従う．

次にサイバーグ・ウィッテン不変量が 0 でないような $Spin^c$-構造 $\widetilde{P}$ があったとしよう．使われる性質は $\widetilde{P}$ に対するサイバーグ・ウィッテン方程式の解が存在するということと，モデュライ空間の形式的次元が非負であるということである．対合写像による対称性から，行列式直線束 $\mathcal{L}$ が非正次数をもつ場合を考えれば十分である．次元に関する条件は $\mathcal{L}^2 \geq K_X^2 = 0$ を意味する．もし $\mathcal{L}$ の次数が 0 ならば $c_1(\mathcal{L})^2 = 0$ であり，よって $c_1(\mathcal{L})$ は捩れ類である．これはこの定理においては許されている．

ここからは $\mathcal{L}$ の次数は負であると仮定しよう．特に $\mathcal{L}_0$ の正則切断 α は非自明である．前と同様に，このことと K_X の数値的効果性より $K_X \cdot (K_X + L) = K_X \cdot L \geq 0$ となる．ある $t_0 > 0$ に対し $K_X + t_0 L$ の次数は 0 になり，よってホッジ指数定理により

$$2t_0 K_X \cdot L + t_0^2 L^2 \leq 0$$

となり，等号が成立するのは $K_X + t_0 L$ が捩れ類のときで，またそのときに限る．$K_X \cdot L \geq 0$ なので，したがって $L^2 \leq 0$ となる．一方，形式的次元が非負

であることから $L^2 - K_X^2 = L^2 \geq 0$ である．よって $L^2 = 0$ であり，$K_X \cdot L = 0$ となる．これは $K_X + t_0 L$ は捩れ類であることを意味する．K_X と L は整係数コホモロジーで K_X は捩れを法として非自明であるので，t_0 は有理数である．

この t_0 は 1 より小さくはない．というのは，もし t_0 が 1 より小さいとすると $\mathcal{L}_0$ は負の次数をもつことになり，$\mathcal{L}_0$ が自明でない正則切断をもつことに矛盾するからである．前と同様に，もし $t_0 = 1$ ならば $\mathcal{L}_0$ は次数 0 であり自明でない正則切断をもつので自明な束に正則同型である．これにより，問題にしている $Spin^c$-構造が $\widetilde{P}_X$ であることが証明された．

$\mathcal{L}$ が正次数のときは対称性から従う． □

系 7.4.5 X と Y を極小ケーラー曲面とし，各々一般型であるかまたは標準類が捩れ類ではないような楕円曲面であるかのどちらかであると仮定する．$f : X \to Y$ を向きを保つ微分同相写像であるとする．このとき $f^*(K_Y) = \pm K_X$ が成り立つ．

注意 7.4.6 K_X が捩れ類のとき (例えば $K3$ 曲面の場合) も同様の結果を証明することができる．しかしこの場合可約解をもっと丁寧に調べなければならない．このような場合の議論の記述は [3] をみよ．

ブロー・アップ (blow-up) された曲面の場合に上の 2 つの定理から帰結される結果を述べて本節を終わろう．

定理 7.4.7 X をケーラー曲面とし，その極小モデル $\overline{X}$ は一般型曲面であるか，または $K_{\overline{X}}$ が捩れ類ではないような楕円曲面であるとする．$X \to \overline{X}$ の非自明なファイバーは例外曲線 $E_1, \cdots, E_k$ であるとする．ケーラー計量は

$$\omega = \bar{\omega} - \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i [E_i]^*$$

の形のケーラー形式 ω をもつとする．ここに ϵ_i は十分小さい正の実数で $[E_i]^*$ は i 番目の例外曲線にポアンカレ双対なコホモロジー類である．$\widetilde{P}$ をそのサイバーグ・ウィッテン不変量が非自明であるような X 上の $Spin^c$-構造とする．こ

のとき $\widetilde{P}$ は，非自明サイバーグ・ウィッテン不変量をもつ $\overline{X}$ 上の $Spin^c$-構造 $\overline{P}$ を X に引き戻したものと，第 1 チャーン類が $\pm E_1 \pm \cdots \pm E_k$ の形になる $U(1)$-束とのテンソル積として得られる．しかも

$$SW_X(\widetilde{P}) = \pm SW_{\overline{X}}(\overline{P})$$

が成り立つ．

証明　$\pi : X \to \overline{X}$ を極小モデルへの射影とし，$\mathcal{L}_0$ を非自明正則切断 α をもつ束とする．このとき $\overline{\mathcal{L}_0} = \pi_*(\mathcal{L}_0)$ は $\overline{X}$ 上の直線束で $\overline{\alpha} = \pi_*(\alpha)$ は非自明正則切断である[訳注 3)]．よって，もし $\widetilde{P}$ が X 上の $Spin^c$-構造でその行列式直線束は負の次数をもちサイバーグ・ウィッテン方程式は解をもつとすると，その押し出し (pushforward) $\overline{P}$ は $\overline{X}$ 上の $Spin^c$-構造で，その行列式直線束 $\overline{\mathcal{L}}$ は負次数をもち，そのサイバーグ・ウィッテン方程式は解をもつ．

第 1 チャーン類 $c_1(\mathcal{L})$ は奇整数 n_i を用いて $\pi^*(c_1(\overline{\mathcal{L}})) + \sum_{i=1}^{k} n_i[E_i]^*$ の形に書くことができる[訳注 4)]．したがって，

$$c_1(\mathcal{L})^2 - K_X^2 \le c_1(\overline{\mathcal{L}})^2 - K_{\overline{X}}^2$$

となる．仮定より $\widetilde{P}$ に対するモデュライ空間の形式的次元は非負であるから

$$0 \le c_1(\mathcal{L})^2 - K_X^2$$

となり，$c_1(\overline{\mathcal{L}})^2 \ge K_{\overline{X}}^2$ となる．しかし定理 7.4.1 および定理 7.4.4 の証明中にみたようにこれは等号でなければならない．よってすべての i に対し $n_i = \pm 1$ でなければならない．

サイバーグ・ウィッテン方程式の解の同一視，およびその結果としてのサイバーグ・ウィッテン不変量の同一視は読者にまかせる (詳細は [3] をみよ)．　□

訳注 3) $\mathcal{L}_0$ および $\overline{\mathcal{L}_0}$ を効果的因子と同一視している．

訳注 4) $c_1(\mathcal{L}) \equiv w_2(X) \equiv c_1(K_X) = \pi^* c_1(K_{\overline{X}}) + \sum_{i=1}^{k}[E_i]^*$ (mod 2)，かつ $c_1(\overline{\mathcal{L}}) \equiv w_2(\overline{X}) \equiv c_1(K_{\overline{X}})$ (mod 2) であるから．

7.5 終わりの言葉

本章ではケーラー多様体上でサイバーグ・ウィッテン方程式を解くことに専念した．最近のいくつかの論文 [12, 13, 14] でタウベスはシンプレクティック多様体に対するこれらの結果の (いくぶん弱い) アナロジーを証明した．特にタウベスは，$b_2^+ > 1$ であるような任意のシンプレクティック多様体の反標準束に対するサイバーグ・ウィッテン不変量は 1 であることを証明した．これはケーラー多様体に対するここでの結果を一般化するものである．さらに彼は定理 7.4.4 のアナロジーを証明し，またサイバーグ・ウィッテン不変量は (固定した点を通る) 擬正則曲線の個数を数えるグロモフ不変量と一致することを示した．これらは，ケーラー幾何の標準的結果のシンプレクティック幾何へのアナロジーを見い出すという膨大なプログラムの出発点となることは間違いない．このアナロジーの強さがどの程度であるかは時間が教えてくれるであろう．しかしこれは明らかに将来有望な研究分野である．

参考文献

[1] S. Donaldson and P. Kronheimer, 'The Geometry of Four-Manifolds,' Clarendon, Oxford, 1990.

[2] R. Friedman and J. Morgan, 'Smooth Four-Manifolds and Complex Surfaces,' in Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grensgebiete 3. Folge, Band 27, Springer-Verlag, New York, 1994.

[3] R. Friedman and J. Morgan, Algebraic surfaces and Seiberg-Witten invariants, J. Alg. Geom. **6** (1997), 445-479.

[4] P. Griffiths and J. Harris, 'Principles of Algebraic Geometry,' Wiley, New York, 1978.

[5] J. Kazdan and F. Warner, Curvature functions for compact 2- manifolds, Ann. of Math. **99** (1974), 14-47.

[6] P. Kronheimer and T. Mrowka, The genus of embedded surfaces in the projective plane, Math. Res. Lett. **1** (1994), 797-808.

[7] B. Lawson and M-L. Michelsohn, 'Spin Geometry,' Princeton University Press, Princeton, 1989.

[8] J. Morgan, Z. Szabó and C. Taubes, A product formula for the Seiberg-Witten invariants and the generalized Thom Conjecture, J. Diff. Geom. **44** (1996), 706-788.

[9] N. Seiberg and E. Witten, Electromagnetic duality, monopole condensation and confinement in N=2 supersymmetric Yang-Mills theory,

Nucl. Phys. **B426** (1994), 19-52.

[10] N. Seiberg and E. Witten, Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in N=2 supersymmetric QCD, Nucl. Phys. **B431** (1994), 581-640.

[11] C. Taubes, Self-dual connections on non-self-dual four-manifolds, J. Diff. Geom. **17** (1982), 139-170.

[12] C. Taubes, The Seiberg-Witten invariants and symplectic forms, Math. Res. Lett. **1** (1994), 809-822.

[13] C. Taubes, More constraints on symplectic forms from Seiberg-Witten invariants, Math. Res. Lett. **2** (1995), 9-13.

[14] C. Taubes, The Seiberg-Witten and Gromov invariants, Math. Res. Lett., **2** (1995), 221-238; SW ⇒ Gr: from the Seiberg-Witten equations to pseudo-holomorphic curves, J. Amer. Math. Soc. **8** (1996), 845-918.

[15] K. Uhlenbeck, Removable singularities in Yang-Mills fields, Comm. Math. Phys. **83** (1982), 11-29.

[16] R. Wells, 'Differential Analysis on Complex Manifolds,' Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1973, 2nd ed. Springer-Verlag, New York.

[17] E. Witten, Monopoles and 4-manifolds, Math. Res. Lett. **1** (1994), 764-796.

訳者あとがき

著者のジョン.W. モーガン (John W. Morgan) は 1946 年生まれで，現在コロンビア大学の教授である．トポロジーの色々な分野で活躍した後，1980 年代前半にゲージ理論の 4 次元トポロジーへの応用に関する研究 (いわゆるドナルドソン理論) が始まった頃からこの分野に参入し，主に R. フリードマン (R. Friedman) との共同研究で代数曲面の可微分構造を研究してきた．その成果は彼等の共著の本 (文献 [2]) にまとめられている．1994 年にサイバーグ・ウィッテン理論が登場してからはこの新理論の研究でも活躍している．例えばその応用として，一般型ケーラー曲面の標準類が，よって特に多重種数が，可微分構造にしかよらないことを R. フリードマンと共同で証明した (文献 [3]．R.Brussee および C.Okonek-A.Telelman も同時期に同じ結果を得た)．

本書は，Princeton University Press から 1996 年に発行された本

The Seiberg-Witten equations and applications to the topology of smooth four-manifolds

の翻訳である．クリフォード代数，スピン表現などの基本的な事柄から出発して，サイバーグ・ウィッテン不変量の定義，ケーラー曲面の場合の計算例までが解説された，サイバーグ・ウィッテン理論への入門書である．この中の 7.4 節に上述の一般型ケーラー曲面に対する結果の証明の一部分が与えられている．

本書を読むにあたって参考になると思われる文献のうち手に入りやすい日本語の本を挙げておこう．

[a] 茂木勇・伊藤光弘：微分幾何学とゲージ理論，共立出版，1986

[b] 小林昭七：接続の幾何学とゲージ理論，裳華房，1989

[c] 深谷賢治：ゲージ理論とトポロジー，シュプリンガー・フェアラーク東京，1995

これらはすべてドナルドソン理論に関する本である．ドナルドソン理論が主に $SU(2)$ または $SO(3)$ 接続に関する微分方程式の解のモデュライ空間を用いるのに対し，サイバーグ・ウィッテン理論ではスピノル場と $U(1)$ 接続に関する微分方程式の解のモデュライ空間を用いる．この違いを除けばあとの構成方法はほとんど同じである．したがって本書を読み進むにつれて基礎的知識の不足を感じたり，より詳細な記述を読みたいと感ずることがあれば，これらの本の中に参考になる解説を探すことを勧める．また洋書ではあるが，ドナルドソンとクロンハイマーの本 (文献 [1]) も多くの事柄に対して基礎から解説が与えられている好著である．

なお，原書が書かれた後に発表された論文等のリストも作成すべきだったかも知れないが，完全なリストを作ることはもとより不可能であるし，重要なものだけを選ぶことは訳者の力不足からやはり不可能なので作らないことにした．新着雑誌やインターネットなどを利用して入手できる論文の参考文献等から逆引きで重要な論文をみつけて読んで頂きたい．

さて，本書ではサイバーグ・ウィッテン理論の 4 次元微分トポロジーへの応用例の記述が少ないので，ここで補足として簡単にふれておきたい．4 次元トポロジーで知られている M. フリードマン (M. Freedman) の定理によれば，2 つの単連結な 4 次元微分可能多様体が同じ交点形式をもてばこの 2 つは位相同型である．例えば $\mathbf{CP}^3$ の次数が十分大きい超曲面 X は，ある大きい自然数 $p \geq 2$ と $q > 0$ に対し p 個の $\mathbf{CP}^2$ と q 個の $\overline{\mathbf{CP}^2}$ の連結和 Y と同じ交点形式をもち，したがって X と Y は位相同型である．ところが命題 7.3.1 により，X のケーラー多様体としての標準的 $Spin^c$-構造に関し $SW(\widetilde{P}_X) = 1$ である一方，次の結果から Y の任意の $Spin^c$-構造に関し $SW(\widetilde{P}_Y) = 0$ である：すなわち，4 次元閉多様体 M が $b_2^+(M_1) > 0$, $b_2^+(M_2) > 0$ なる M_1 と M_2 の連結和として書かれるならば M の任意の $Spin^c$-構造に関し $SW(\widetilde{P}_M) = 0$ である (文献 [17], §2 参照)．したがって X と Y は位相同型であるが微分同相ではな

い例になる．このように，サイバーグ・ウィッテン不変量は可微分構造の違いを明確に区別する道具となる．以上の議論は，ドナルドソン不変量に対し与えられていた議論と全く同じである (詳細は [1] の 1.3 を参照せよ).

最後に，貴重な時間を割いてモーガン・サリバンの仕事を説明して下さった東京工業大学の吉田朋好氏，本書の翻訳にあたってお世話になった培風館の岩田誠司氏，そして翻訳の機会を与えて下さった東京工業大学の小島定吉氏に深く感謝したい．

1998 年 6 月

訳者しるす

索　引

あ 行

か 行

さ 行

た　行

な　行

は　行

ら　行

記号等

訳者略歴

二　木　昭　人
ふた　き　あき　と

1981年　東京大学大学院理学系研究科
博士課程中退
1987年　理学博士
現　在　東京工業大学大学院理工学研究科
教授

主要著書

教養の数学（共著, 培風館, 1985）
Kähler–Einstein metrics and integral invariants（Springer–Verlag, 1990）

1998年 6 月 23 日　初 版 発 行

サイバーグ・ウィッテン理論
とトポロジー

原著者　J. W. モーガン
訳　者　二 木 昭 人
発行者　山 本　格

発行所　株式会社　培　風　館
東京都千代田区九段南 4-3-12・郵便番号102-8260
電話 (03) 3262-5256 (代表)・振 替 00140-7-44725

平文社印刷・三水舎製本

PRINTED IN JAPAN

ISBN4-563-00262-3 C3041